

- Stoffeigenschaften von Fluiden
- Hydrostatik
- Kinematik von Fluiden
- Inkompressible Strömungen
- Aufgaben
- Anhang

Peter Junglas 24. 01. 2023

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Stoffeigenschaften von Fluiden
 - Einleitung
 - Dichte
 - Schallgeschwindigkeit
 - Viskosität
- Hydrostatik
 - Hydrostatischer Druck
 - Freie Oberfläche
 - Druckkraft auf eine ebene Wand
- Kinematik von Fluiden
 - Übersicht
 - Beschreibung von Strömungen
- Inkompressible Strömungen
 - Grundgleichungen
 - Kontinuitätsgleichung
 - Energiegleichung
 - Ähnlichkeitsgesetze
 - Grundformen reibungsbehafteter Strömung
 - Strömung in Rohren
 - Energiegleichung für reibungsbehaftete Strömungen
 - Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren
 - Turbulente Strömung in kreisförmigen Rohren
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Lösung von Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Lösung von Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
 - Lösung von Aufgabe 3
 - Aufgabe 4
 - Lösung von Aufgabe 4
 - Aufgabe 5
 - Lösung von Aufgabe 5
 - Aufgabe 6
 - Lösung von Aufgabe 6
 - Aufgabe 7
 - Lösung von Aufgabe 7
 - Aufgabe 8
 - Lösung von Aufgabe 8
 - Aufgabe 9
 - Lösung von Aufgabe 9
 - Aufgabe 10
 - Lösung von Aufgabe 10
 - Aufgabe 11
 - Lösung von Aufgabe 11
 - Aufgabe 12
 - Lösung von Aufgabe 12
 - Aufgabe 13
 - Lösung von Aufgabe 13
 - Aufgabe 14
 - Lösung von Aufgabe 14
 - Aufgabe 15
 - Lösung von Aufgabe 15
 - Aufgabe 16

- Lösung von Aufgabe 16
- Aufgabe 17
 - Lösung von Aufgabe 17
- Aufgabe 18
 - Lösung von Aufgabe 18
- Aufgabe 19
 - Lösung von Aufgabe 19
- Aufgabe 20
 - Lösung von Aufgabe 20
- Aufgabe 21
 - Lösung von Aufgabe 21
- Anhang
 - Literatur
 - Nachweise

- Einleitung
- Dichte
- Schallgeschwindigkeit
- Viskosität

- Fluide:

Sammelbezeichnung für Flüssigkeiten und Gase

charakterisierende Eigenschaften

- ändern ihre Form
- nehmen keine Schubspannungen auf

i.f. immer homogen angenommen

- Kontinuumsannahme:

Masse ist stetig über das Volumen verteilt

von Aufbau aus Molekülen wird abgesehen

gültig außer bei extrem niedrigen Dichten

- Technische Anwendungen:

Luftwiderstand von Autos oder Flugzeugen

Druckabfall in Leitungsrohren (z.B. Gas, Dampf, Wasser)

Strömungsmaschinen (Pumpen, Kompressoren, Turbinen)

- Definition der Dichte ρ :

für homogenes Fluid der Masse m im Volumen V

$$\rho = m / V$$

i.a. an verschiedenen Stellen unterschiedlich (ortsabhängig)

Dichte am Ort x (kleines Volumen dV mit Masse dm)

$$\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV}$$

- Abhängigkeit von Druck und Temperatur:

relative Volumenänderung dV/V bei Druckänderung dp

$$\frac{dV}{V} = -\kappa dp$$

Kompressibilität κ

relative Volumenänderung dV/V bei Temperaturänderung dT

$$\frac{dV}{V} = \gamma dT$$

Volumenausdehnungskoeffizient γ

gesamte Änderung daher

$$\frac{dV}{V} = -\kappa dp + \gamma dT$$

Änderung der Dichte

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dV} &= \frac{d}{dV} \left(\frac{m}{V} \right) = -\frac{m}{V^2} = -\frac{\rho}{V} \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{dV}{V} = \kappa dp - \gamma dT \end{aligned}$$

- Dichteänderungen bei Flüssigkeiten:

einige Werte bei 1 bar, 20 °C

Flüssigkeit	γ [10^{-3} 1/K]	κ [10^{-5} 1/bar]
Wasser	0.207	4.68
Methanol	1.19	12.0
Äthanol	1.1	11.4
Glycerin	0.5	2.2

Dichte nur wenig von Temperatur und fast gar nicht vom Druck abhängig

Strömungen von Flüssigkeiten praktisch immer inkompressibel gerechnet ($\rho = \text{const.}$)

- Dichteänderung bei Gasen:

bei idealem Gas

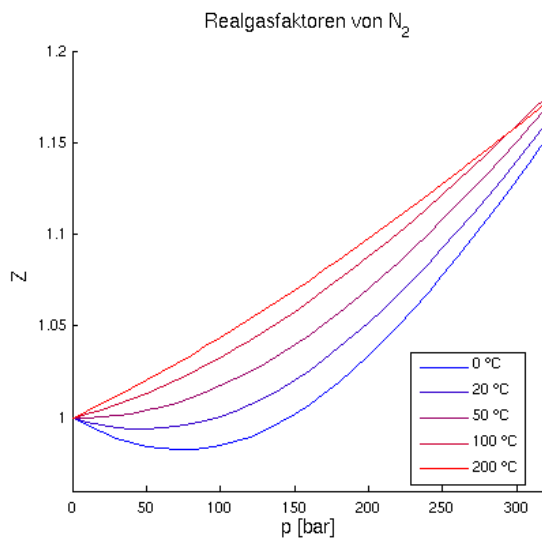
$$\begin{aligned} pV &= mR_iT \\ \Rightarrow \rho &= \frac{p}{R_iT} \end{aligned}$$

Realgasfaktor Z = Korrektur bei realen Gasen

$$pV = ZmR_iT$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p}{ZR_iT}$$

Werte von Z für Stickstoff



• Dichte ρ_f von feuchter Luft:

- Massen von (trockener) Luft und vom Wasserdampf berücksichtigen

$$\rho_f = \frac{m_f}{V} = \frac{m_L}{V} + \frac{m_W}{V}$$

- Gasgleichung

$$pV = mR_iT = m \frac{R}{M} T$$

$$\Rightarrow m = \frac{pVM}{RT}$$

damit

$$\rho_f = \frac{1}{RT} (p_L M_L + p_W M_W)$$

- Partialdruck $p_S(T)$: maximale Wasserdampfmenge bei Temperatur T mit relativer Luftfeuchtigkeit $\phi := p_W / p_S$ also

$$p_W = \phi p_S$$

Gesamtdruck

$$p = p_L + \phi p_S$$

- damit wird ρ_f

$$\rho_f = \frac{1}{RT} ((p - \phi p_S) M_L + \phi p_S M_W)$$

$$= \frac{p M_L}{RT} \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \phi \frac{p_S}{p} \right)$$

Dichte der trockenen Luft (bei gleichem Gesamtdruck p) ist

$$\rho_{tr} = \frac{p M_L}{RT}$$

- insgesamt also

$$\begin{aligned}\rho_f &= \rho_{tr} \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \varphi \frac{p_S}{p} \right) \\ &\approx \rho_{tr} \left(1 - 0.377 \varphi \frac{p_S}{p} \right)\end{aligned}$$

- Schall:

schnelle Druckänderung

in guter Näherung adiabatisch

Schallgeschwindigkeit a gegeben durch

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S}$$

- Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten:

isentropische Temperaturänderung dT sehr klein \rightarrow

$$\frac{d\rho}{\rho} \approx \kappa dp$$
$$\Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\kappa\rho}$$

mit Kompressionsmodul $E = 1/\kappa$ also

$$a = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Schallgeschwindigkeit in Gasen:

Adiabatengleichung für ideales Gas

$$p v^\kappa = \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.}$$

(κ = Adiabatenkoeffizient, **nicht** Kompressibilität!)

damit

$$\frac{dp}{d\rho} = \text{const.} \cdot \kappa \rho^{\kappa-1} = \kappa \frac{p}{\rho}$$

ideale Gasgleichung ergibt

$$a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R_i T}$$

- Aufgaben:

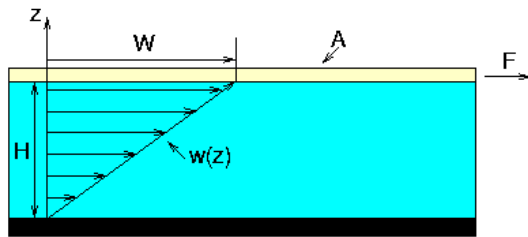
Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

- Couette-Strömung:

grundlegende Versuchsanordnung



lineares Geschwindigkeitsprofil

Kraft F zur Bewegung der Platte erfüllt (für viele Fluide)

$$F \sim A W/H$$

Proportionalitätskonstante η (**dynamische Viskosität**)

bei beliebigen Strömungen Geschwindigkeitsänderung quer zur Strömung

$$\frac{W}{H} \rightarrow \frac{dw}{dz}$$

mit Schubspannung $\tau = F/A$ dann

$$\tau = \eta \frac{dw}{dz}$$

- Bedeutung der Viskosität:

Maß für die "innere" Reibung (zwischen "Schichten" verschiedener Geschwindigkeit)

abhängig vom Fluid (Stoffeigenschaft)

für viele Fluide unabhängig vom Geschwindigkeitsgradienten dw/dz (**Newtonsche Fluide**)

- gilt für alle Gase
- sehr gut erfüllt für viele Flüssigkeiten (u.a. Wasser)

kinematische Viskosität

$$\nu = \eta/\rho$$

- Physikalische Deutung:

ungeordnete Wärmebewegung der Fluidteilchen

Teilchen diffundieren auch quer zur Bewegungsrichtung

Impulstransport quer zur Strömung

- Teilchen geraten in "Schichten" anderer Strömungsgeschwindigkeit
- langsamere Eindringlinge bremsen die Schicht
- schnellere schieben an

außerdem Anziehungskräfte zwischen benachbarten Teilchen verschiedener Geschwindigkeit

Gesamteffekt: Schubkräfte zwischen Schichten

- Eigenschaften der Viskosität:

nahezu druckunabhängig (außer bei sehr hohen Drücken)

Temperaturabhängigkeit bei Gasen

- Wärmebewegung nimmt mit Temperatur zu
- → höhere Durchmischung der Schichten
- → Viskosität steigt

Temperaturabhängigkeit bei Flüssigkeiten

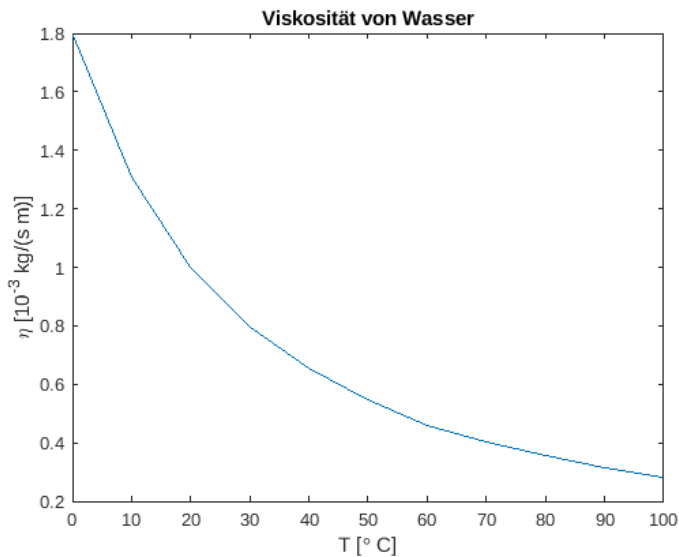
- Wärmebewegung nimmt mit Temperatur zu
- → Einfluss der Anziehungskräfte zwischen Teilchen nimmt ab
- → Viskosität sinkt

• Typische Werte der Viskosität:

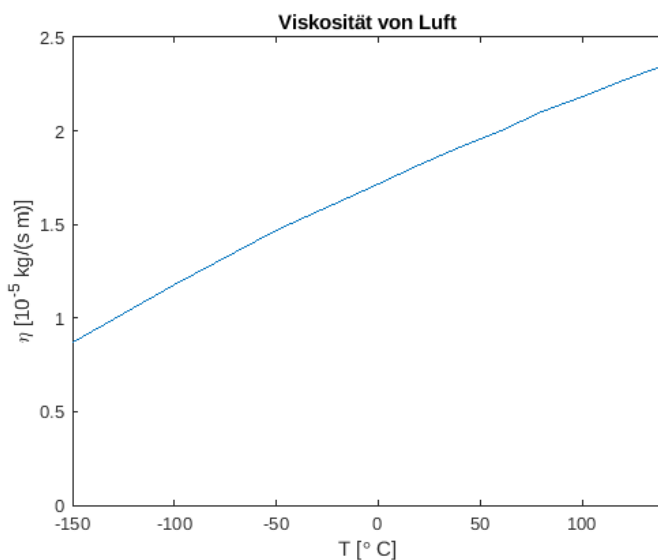
Richtwerte bei 20 °C

Wasser	$1.00 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$
Luft	$1.82 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(s m)}$

Viskosität von Wasser als Funktion der Temperatur



Viskosität von Luft als Funktion der Temperatur



• Nicht-Newtonsche Fluide:

Schubspannung τ nicht proportional zu dw/dz

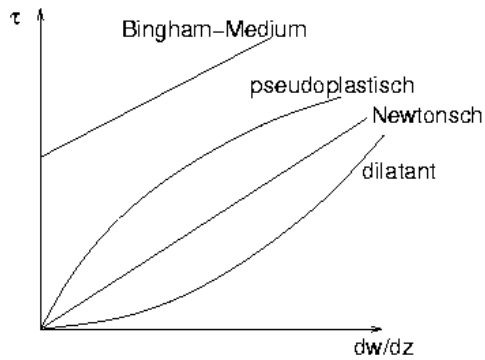
völlig unterschiedliche Klassen von Materialien

Ursachen:

- komplizierte Kräfte zwischen Teilchen
- Richtungsabhängigkeiten, Ausrichtung der Teilchen
- inhomogene Fluide (z.B. Suspensionen)

- Einige Beispiele:

Grundtypen



pseudoplastische Fluide

- Viskosität nimmt mit dw/dz ab
- Schmelzen, hochpolymere Öle

dilatante Fluide

- Viskosität nimmt mit dw/dz zu
- Suspensionen

Bingham-Medien

- Viskosität ist $\neq 0$ bei $dw/dz = 0$
- verhalten sich teilweise wie feste Körper (plastisch)
- Zahnpasta, Mörtel

thixotrope Substanzen

- Viskosität nimmt bei konstanter Scherung zeitlich ab
- Joghurt

- Aufgaben:

Aufgabe 4

Aufgabe 5

- Hydrostatischer Druck
- Freie Oberfläche
- Druckkraft auf eine ebene Wand

- Druck p im ruhenden Fluid:

senkrecht auf eine Fläche A wirkende Kraft F_n

i.a. ortsabhängig, also für sehr kleine Fläche definieren

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

SI-Einheit Pascal

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

abgeleitete Einheit

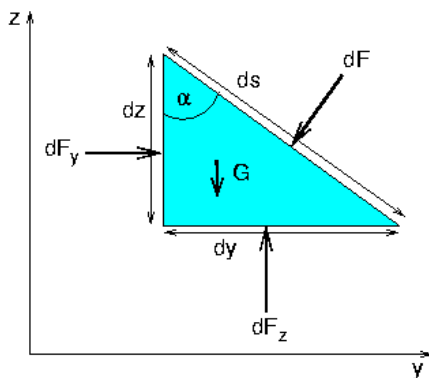
$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

1 bar \approx Luftdruck auf Meereshöhe

- Richtungsunabhängigkeit des Drucks:

Kräftegleichgewicht im ruhenden Fluid

betrachten kleines Prisma, Dicke dx



Kräftegleichgewicht in y-Richtung

$$\begin{aligned} dF_y &= dF \cos \alpha \\ \Rightarrow \frac{dF_y}{dA_y} &= \frac{dF \cos \alpha}{dz dx} = \frac{dF}{ds dx} = \frac{dF}{dA} \end{aligned}$$

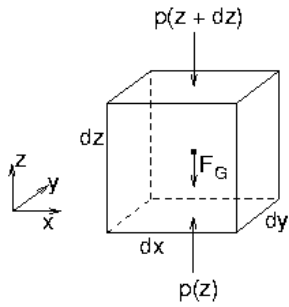
Kräftegleichgewicht in z-Richtung

$$\begin{aligned} dF_z &= dF \sin \alpha + F_G = dF \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho g dx dy dz \\ \Rightarrow \frac{dF_z}{dA_z} &= \frac{dF \sin \alpha}{dx dy} + \frac{1}{2} \rho g dz \\ &= \frac{dF}{dx ds} + \frac{1}{2} \rho g dz \\ &\xrightarrow{dz \rightarrow 0} \frac{dF}{dA} \end{aligned}$$

Druck ist unabhängig von der Orientierung für alle Schnittflächen gleich

- Druck im Schwerfeld:

Kräftegleichgewicht bei Schwerkraft



Kräfte in horizontaler Richtung heben sich auf
Gewichtskraft

$$F_G = - m g = -\rho \, dx \, dy \, dz \, g$$

Gleichgewicht in z-Richtung

$$- p(z + dz) \, dx \, dy + F_G + p(z) \, dx \, dy = 0$$

Änderung des Drucks in erster Ordnung (Tangente)

$$p(z + dz) \approx p(z) + dz \frac{dp}{dz}$$

Einsetzen liefert

$$dp = -\rho \, dz \, g$$

bei Flüssigkeit (konstante Dichte) daher

$$p(z) = -\rho \, g \, z + C$$

Randbedingung: Atmosphärendruck p_0 an der Oberfläche \Rightarrow

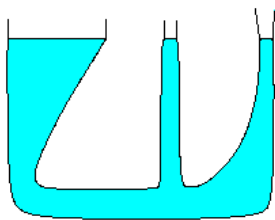
$$p(z) = p_0 - \rho \, g \, z$$

Druck ist gleich in Punkten gleicher Tiefe

- Konsequenzen:

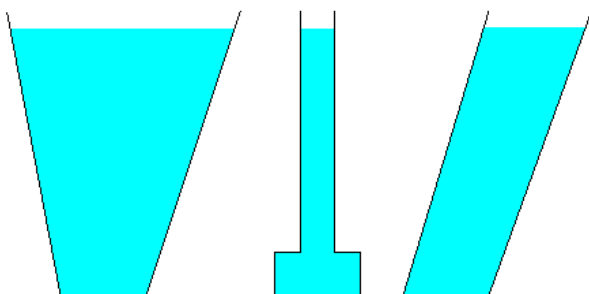
Kommunizierende Röhren

- verbundene Röhren mit homogenem Fluid gefüllt
- \rightarrow Oberflächen auf gleicher Höhe



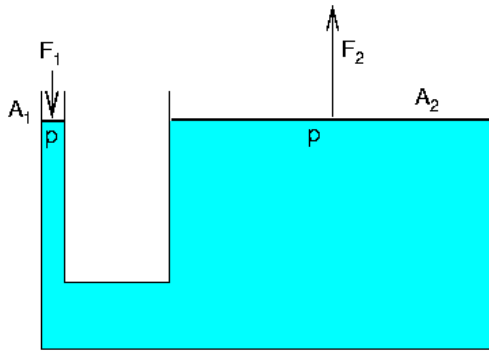
Hydrostatisches Paradoxon

- Druckkraft am Boden unabhängig von der Gefäßform



- Anwendungen:

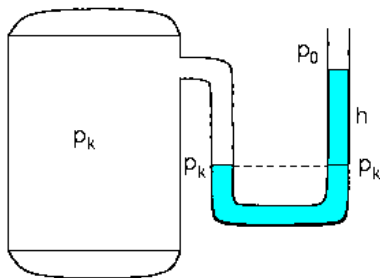
Hydraulische Presse



- kleine Kraft F_1 bei kleiner Fläche A_1
- Druck bei A_1 und A_2 gleich groß
- → große Kraft F_2

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

U-Rohr-Manometer



- Kesseldruck p_K bei gleicher Höhe im rechten Schenkel →
 $p_K = \rho g h + p_0$

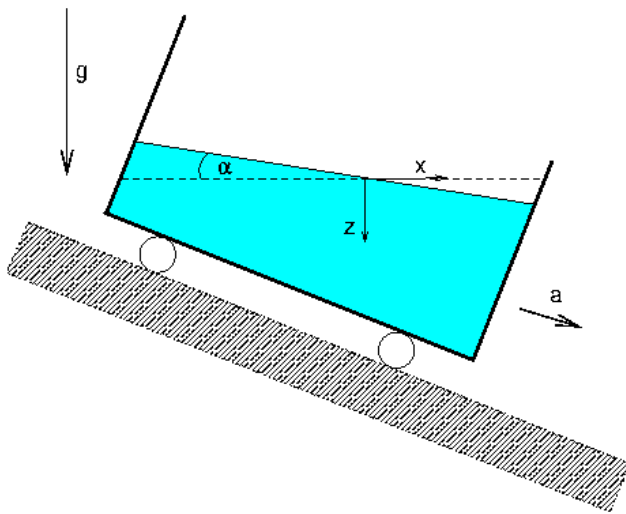
- Aufgaben:

Aufgabe 6

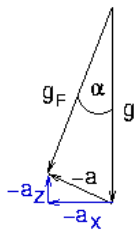
Freie Oberfläche

- Fluid bei konstanter Beschleunigung:

Gefäß mit Fluid unter konstanter Beschleunigung a



Gesamtkraft = Schwerkraft + Trägheitskraft



Winkel α = Abweichung der Gesamtkraft von der Senkrechten

$$\tan \alpha = \frac{a_x}{g - a_z}$$

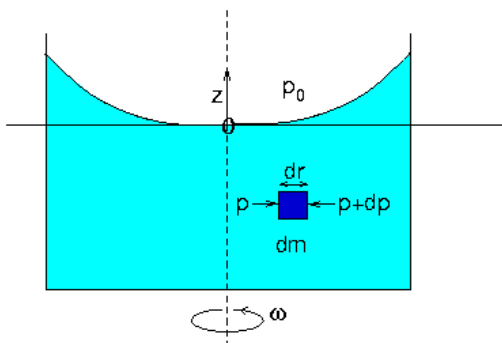
Oberfläche um α geneigt

Druckverteilung wie im ruhenden Fluid, aber

- Tiefe senkrecht zur Oberfläche gemessen
- mit effektiver Schwerebeschleunigung g_F

- Fluid bei gleichförmiger Rotation:

Gefäß mit Fluid bei Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω



betrachten Fluidelement $dm = \rho \, dA \, dr$ im Abstand r

Zentrifugalkraft auf dm

$$dZ = dm \, \omega^2 r = \rho \, dA \, \omega^2 r \, dr$$

Druckkraft auf dm

$$dF = (p + dp) dA - p dA = dp dA$$

Gleichgewicht \rightarrow

$$\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r$$

Integration längs $r \rightarrow$

$$p(z, r) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + C(z)$$

auf der Achse hydrostatischer Druck

$$p(z, r = 0) = p_0 - \rho g z$$

insgesamt

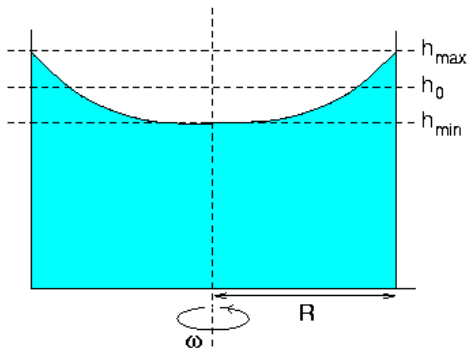
$$p(z, r) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z$$

- Form der Oberfläche $z_0(r)$:

Oberfläche gegeben durch

$$\begin{aligned} p(z_0, r) &= p_0 \\ \Rightarrow z_0(r) &= \frac{\omega^2}{2g} r^2 \end{aligned}$$

Rotations-Paraboloid



Zusammenhang zwischen Ruhehöhe h_0 , h_{\min} und h_{\max} aus Vergleich der Volumina

$$V_{\text{Zylinder}}(h_0 - h_{\min}, R) = V_{\text{Zylinder}}(h_{\max} - h_{\min}, R) - V_{\text{paraboloid}}(h_{\max} - h_{\min}, R)$$

durch Integration oder aus Tabelle

$$V_{\text{Zylinder}}(h, R) = \pi R^2 h$$

$$V_{\text{paraboloid}}(h, R) = \pi R^2 h/2$$

damit

$$h_0 = (h_{\max} + h_{\min})/2$$

- Aufgaben:

Aufgabe 7

Druckkraft auf eine ebene Wand

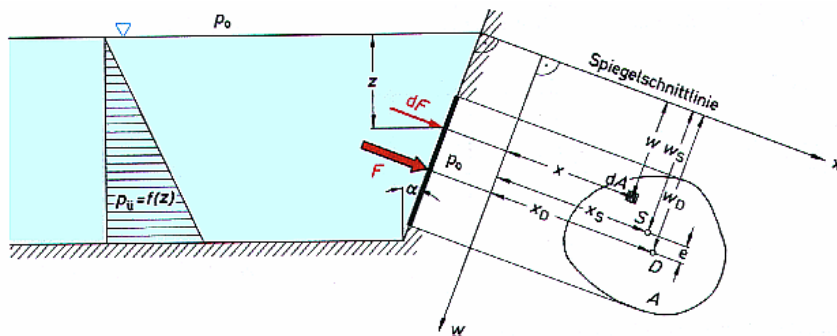


- Geneigte Behälterwand:

Behälter, gefüllt mit Flüssigkeit, Dichte ρ

Wand geneigt um Winkel α

betrachten beliebige Teilfläche A der Behälterwand



x-Achse: Schnitt von Seitenwand und Oberfläche

Koordinaten x und w auf Fläche A

Zusammenhang zwischen w und Tiefe z

$$z = w \cos \alpha$$

Flächenschwerpunkt $S = (x_S, w_S)$

F = auf A wirkende Druckkraft

Angriffspunkt der Kraft $D = (x_D, w_D)$

- Bestimmung der Druckkraft:

betrachten kleine Fläche dA bei $P = (x, w)$

Druck am Punkt P

$$p = p_0 + \rho g w \cos \alpha$$

Kraft auf dA

$$dF = (p - p_0) dA = \rho g w \cos \alpha dA$$

Gesamtkraft auf A durch Integration

$$F = \rho g \cos \alpha \iint_A w dA$$

Flächenschwerpunkt S erfüllt

$$w_S A = \iint_A w dA$$

damit

$$F = \rho g w_S \cos \alpha A$$

oder mit Tiefe des Schwerpunkts $h_S = w_S \cos \alpha$

$$F = \rho g h_S A = (p_S - p_0) A$$

Druckkraft auf A gegeben durch Druck am Schwerpunkt

- Berechnung des Angriffspunkts:

Angriffspunkt D gegeben durch Momentengleichgewicht

konkret um x-Achse

$$w_D F = \iint_A w dF$$

Einsetzen von F und dF →

$$w_D w_S A = \iint_A w^2 dA =: I_W$$

$$\Rightarrow w_D = \frac{I_W}{w_S A}$$

I_W = Flächenträgheitsmoment

Zusammenhang zum Trägheitsmoment I_S bzgl. Schwerpunkt (**Satz von Steiner**)

$$I_W = I_S + w_S^2 A$$

(senkrechter) Abstand e von Angriffspunkt D zum Schwerpunkt S

$$e := w_D - w_S$$

$$= \frac{I_W - w_S^2 A}{w_S A}$$

$$= \frac{I_S}{w_S A}$$

Momentengleichgewicht um w -Achse liefert analog

$$x_D = \frac{I_{wx}}{w_S A}$$

mit Zentrifugalmoment

$$I_{wx} = \iint_A wx dA$$

Werte für I_S

Rechteck, Breite b , Höhe h	$b h^3 / 12$
Kreis, Durchmesser d	$\pi d^4 / 64$

$I_{wx} = 0$ bei symmetrischem A

- Aufgaben:

Aufgabe 8

Aufgabe 9

- 🔍 Übersicht
- 🔍 Beschreibung von Strömungen

Übersicht



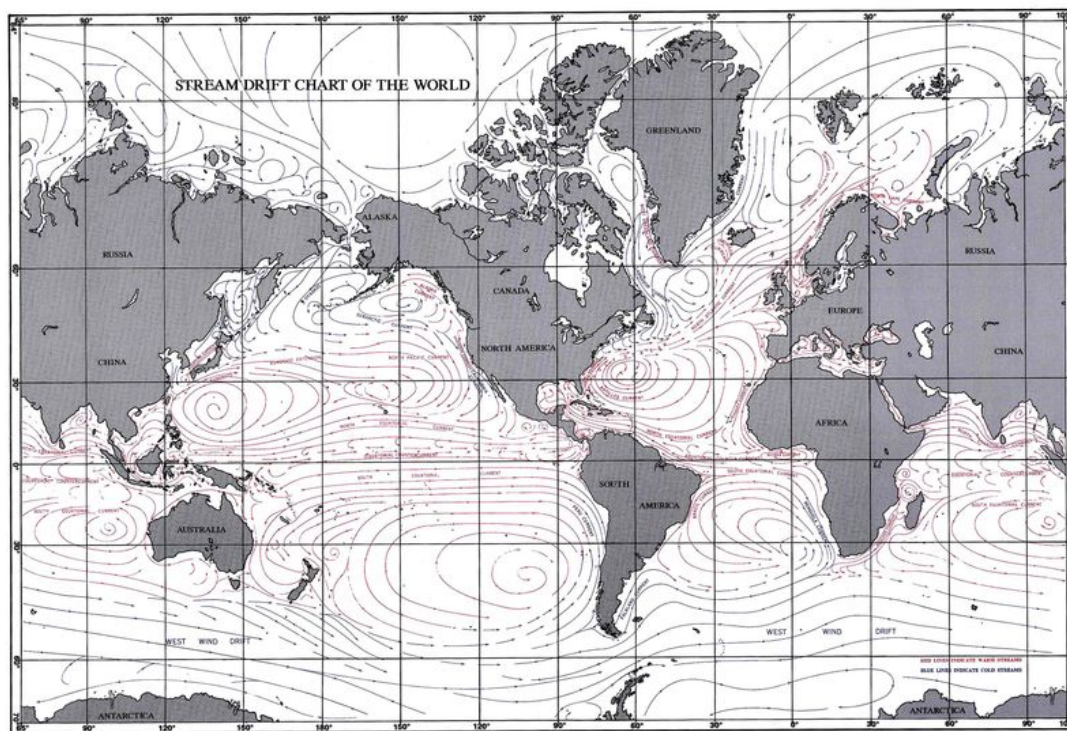
- Strömungen in Natur und Technik:

Luftströmungen in der Atmosphäre



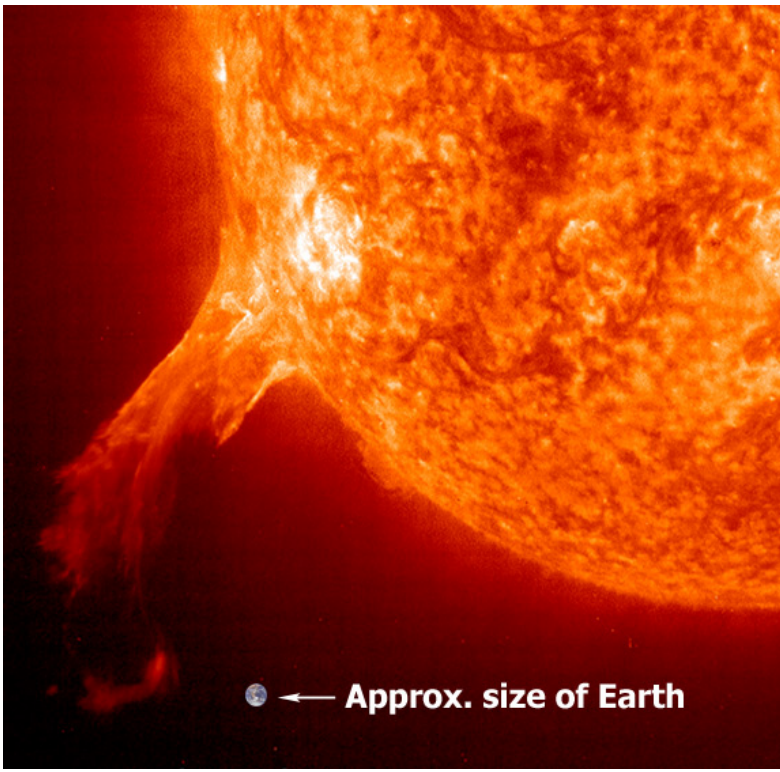
[11]

Wasserströmungen im Ozean



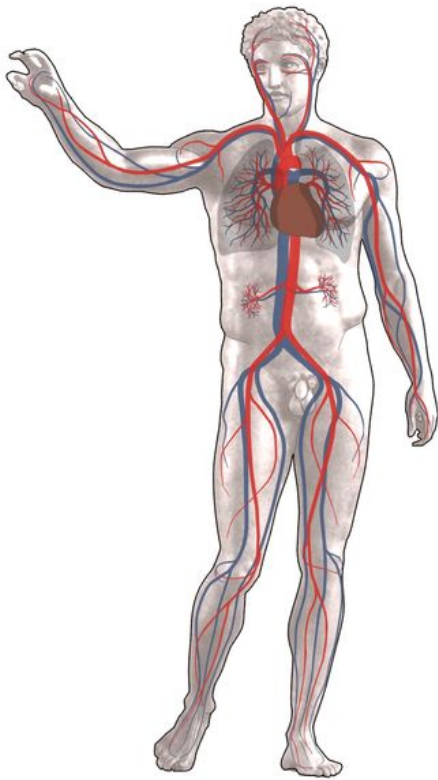
[3]

Plasmaströmungen an der Sonnenoberfläche



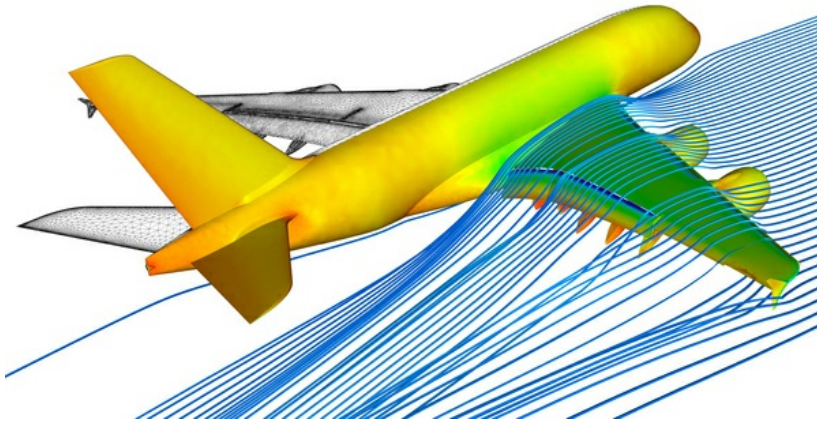
[4]

Blutströmung in den Gefäßen



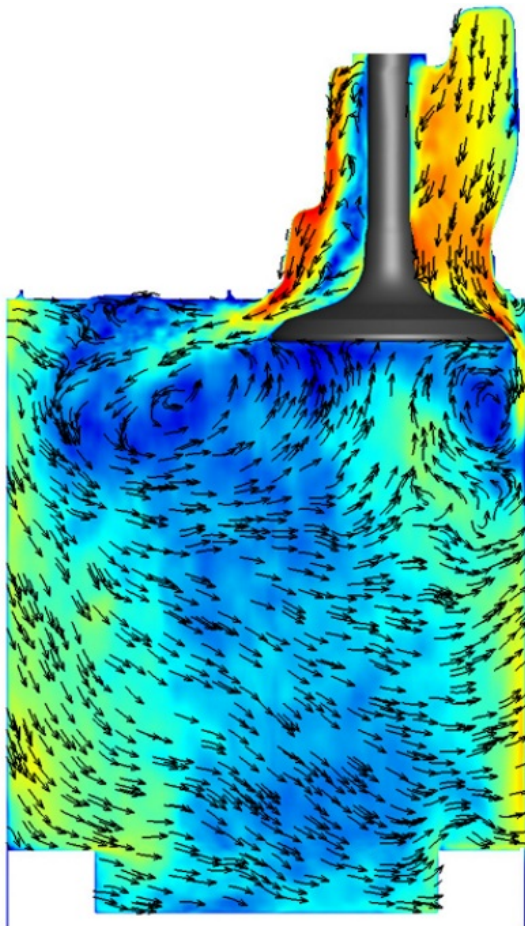
[5]

Umströmung eines Flugzeugs



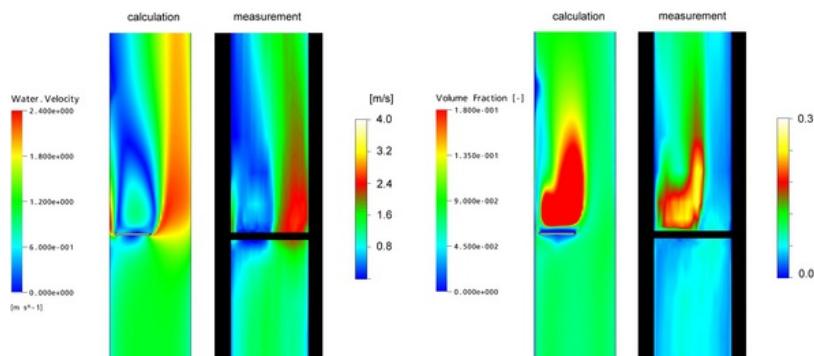
[6]

Zylinderinnenströmung eines Dieselmotors



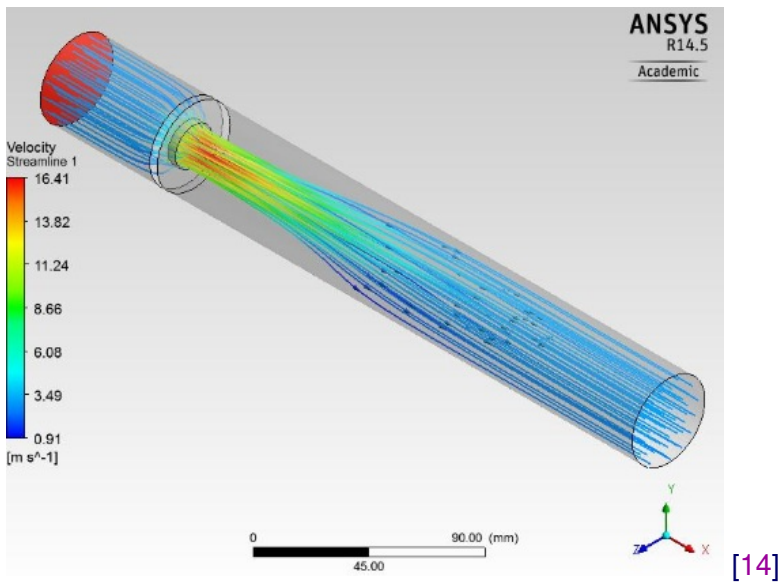
[7]

Zweiphasenströmung



[8]

- Unterschiedliche Strömungsformen:
Strömung durch ein Rohr mit Drossel

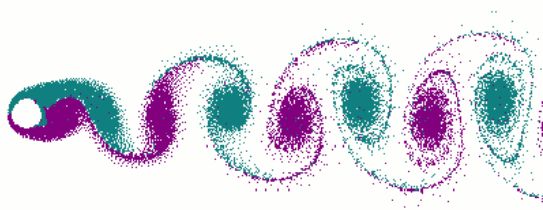


Überschallströmung



[13]

Wirbelstraße hinter einem umströmten Zylinder



[9]

- Unterteilung nach Art des Fluids:

- Newton'sches Fluid

- linearer Zusammenhang zwischen Schubspannung und Geschwindigkeitsgradient
 - $\tau = \eta \, dw/dz$
 - dynamische Viskosität η
 - viele Gase, Wasser

- Nicht-Newton'sches Fluid

- sehr verschiedenartige Eigenschaften möglich
 - Joghurt, Zahnpasta, Mörtel, ...
 - hier nicht weiter betrachtet

- Unterteilung nach Verhalten der Dichte:

inkompressibel

- Dichte ρ konstant
- in Wasser und vielen anderen Flüssigkeiten
- in Gasen bei niedrigen Geschwindigkeiten (z.B. $w < 0.2 c$)

kompressibel

- Dichte veränderlich
- zusätzliche Gleichung für ρ nötig
- thermodynamische Beziehungen berücksichtigen

- Unterteilung nach Zeitabhängigkeit:

zeitunabhängig (**stationär**)

- Strömungsbild zeitlich unveränderlich
- manchmal nur erfüllt in größeren Skalen (**quasistatisch**)

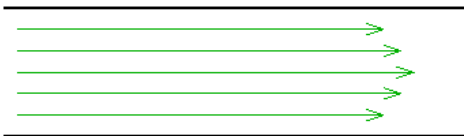
zeitabhängig (**instationär**)

- i.a. komplizierte Bewegungsformen
- schwierig zu visualisieren

- Unterteilung nach Strömungsform

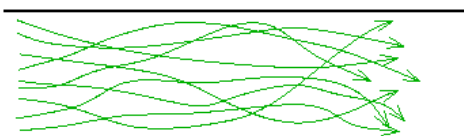
laminar

- Teilchen bewegen sich längs nur langsam veränderlicher Stromfäden
- Schichtenaufbau der Strömung
- keine Vermischung der Schichten



turbulent

- Teilchen bewegen sich auf unregelmäßigen Bahnen
- starke Schwankungen in Querrichtung
- tritt auf bei höherer Geschwindigkeit oder niedrigerer Viskosität



- Strömungsfeld \vec{w} :

Strömung $\vec{w} = (u, v, w)$ gegeben durch Geschwindigkeit der Teilchen am Ort $\vec{x} = (x, y, z)$ zur Zeit t

$$\vec{w} = \vec{w}(\vec{x}, t)$$

in Koordinaten

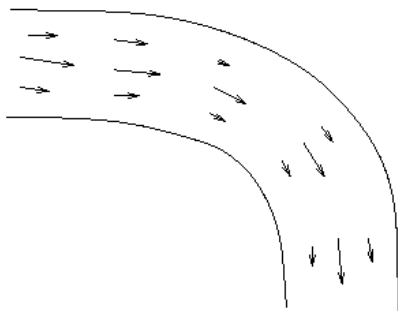
$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

Eulersche Beschreibung

Darstellung durch Richtungspfeile (für jede Zeit t)



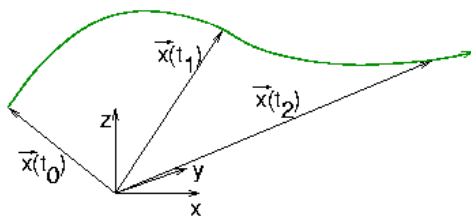
bezogen auf ein Koordinatensystem, z.B.

- ortsfest
- mit konstanter Geschwindigkeit
- mit Körper mitbewegt (z.B. Flugzeug)

stationäre Strömung: \vec{w} hängt nicht von t ab

- Teilchenbahn:

Weg eines Fluidteilchens oder kleinen Fluidvolumens in der Strömung



experimentell: Teilchen anfärben oder Testteilchen einbringen (Aluminiumfitter) und lange belichten

Bahnkurve bestimmt durch Anfangsort \vec{x}_0 zur Zeit t_0

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0);$$

beschreibt die Strömung vollständig (**Lagrangesche Beschreibung**)

Geschwindigkeit der Teilchen

$$\vec{w}(\vec{x}, t) = d\vec{x}/dt$$

- Berechnung der Teilchenbahnen:

Differentialgleichungen für \vec{x} bei gegebenem \vec{w}

in Koordinaten

$$dx/dt = u(x, y, z, t)$$

$$dy/dt = v(x, y, z, t)$$

$$dz/dt = w(x, y, z, t)$$

Anfangsbedingung wählt ein Teilchen aus

$$\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$$

- Stromlinien:

Richtungsfeld von \vec{w} zu einer bestimmten Zeit t

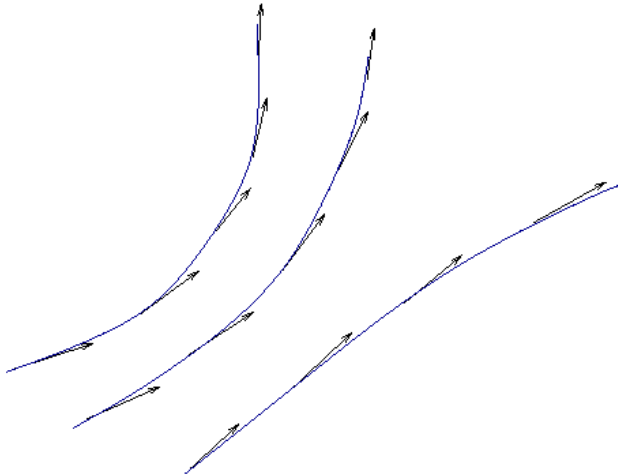
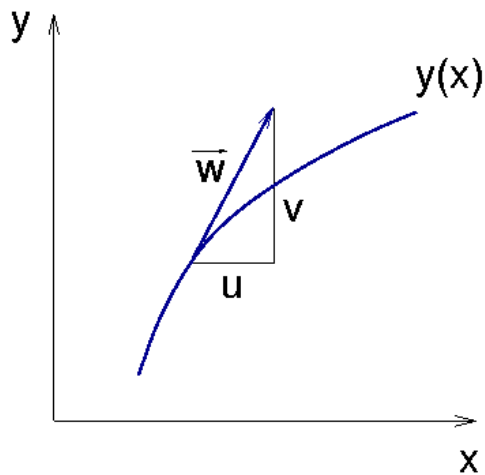


Bild ändert sich mit der Zeit t

daher Stromlinien i.a. verschieden von Bahnlinien

Berechnung in 2 Dimensionen: $\vec{w}(x, y) = (u, v)$

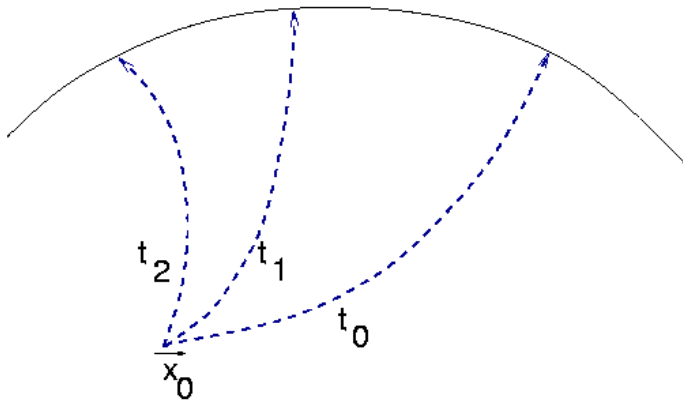


$$dy/dx = v/u$$

experimentell: viele Markierungsteilchen, kurze Belichtungszeit

- Streichlinien:

experimentell: an fester Stelle \vec{x}_0 werden ständig Markierungsteilchen hinzugefügt (Farbe, Rauch)



Streichlinie = Verbindungslinie dieser Teilchen

zur Zeit t gegeben durch

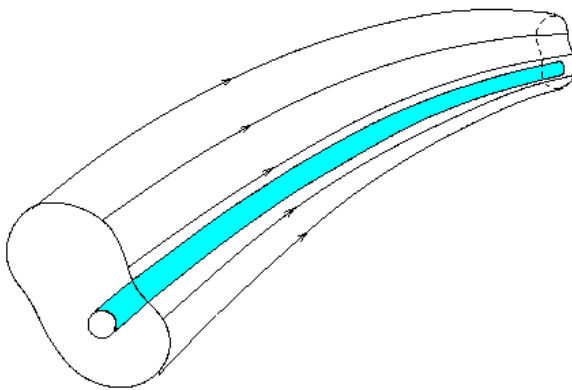
$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0);$$

Parameter der Kurve ist t_0 = Zeit, zu der Teilchen eingesetzt wurde

- Stromfadentheorie:

Stationäre Strömung → Bahnlinie = Stromlinie = Streichlinie

Näherung: Größen hängen nur von der Koordinate längs ihrer Stromlinie ab



Bündel aus vielen Stromlinien: Stromröhre, ganz dünn: Stromfaden

Stromlinien = Bahnlinien → kein Stofftransport durch die Mantelfläche einer Stromröhre

- Aufgaben:

Aufgabe 10

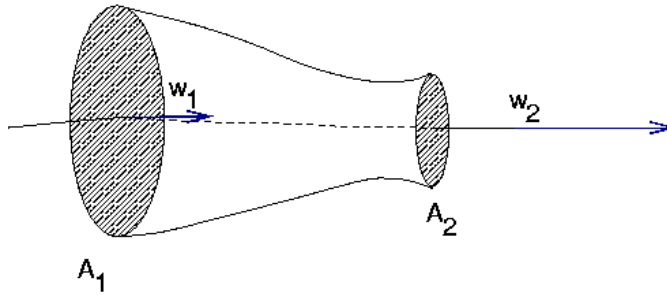
- Grundgleichungen
- Ähnlichkeitsgesetze
- Grundformen reibungsbehafteter Strömung
- Strömung in Rohren

- Kontinuitätsgleichung
- Energiegleichung

- Massenerhaltung:

betrachten inkompressible stationäre Strömung

Stromröhre als Kontrollvolumen



Zustrom von Masse durch A₁ in Zeit dt

$$\begin{aligned} dm_1 &= \rho A_1 ds \\ &= \rho A_1 w_1 dt \end{aligned}$$

Abstrom von Masse durch A₂ in Zeit dt analog

$$dm_2 = \rho \cdot A_2 \cdot w_2 dt$$

stationär →

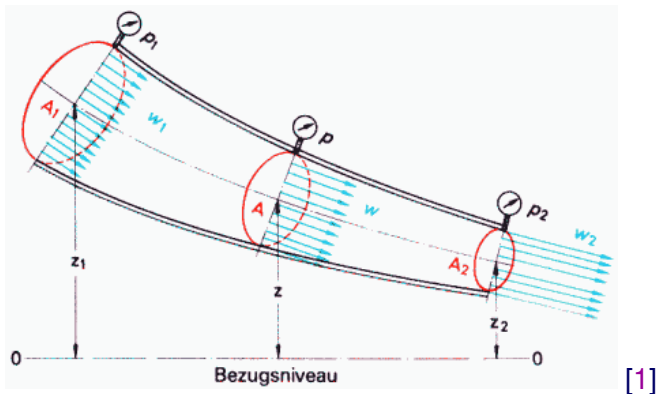
$$dm_1 = dm_2 \Rightarrow$$

$$A_1 \cdot w_1 = A_2 \cdot w_2$$

Energiegleichung

- Energien bei der Stromröhre:

betrachten stationäre reibungsfreie Strömung im Gravitationsfeld



- auftretende Energieformen

$$E_{\text{pot}} = m g z$$

$$E_{\text{kin}} = 1/2 m w^2$$

$$E_{\text{druck}} = p V = m p / \rho$$

E_{druck} = verrichtete Arbeit, um Masse m mit Volumen V gegen den Druck p durchzuschieben
(Volumenänderungsarbeit)

- keine Änderung der inneren Energie (keine Reibung, Temperatur konstant)
- keine zusätzliche äußere Arbeit

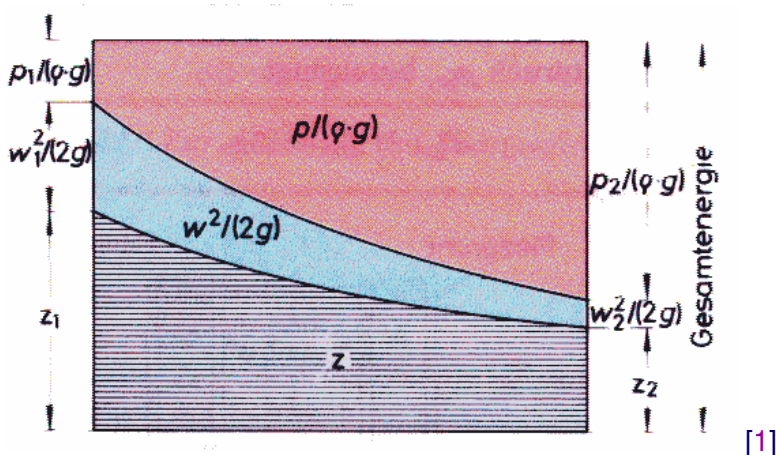
Gesamtenergie an jedem Querschnitt A konstant

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{druck}} \\ &= mgz + \frac{1}{2}mw^2 + \frac{mp}{\rho} \\ &= \text{const.} \end{aligned}$$

mit p/m multiplizieren → Dimension des Drucks

$$\rho g z + p + \rho/2 w^2 = \text{const} \text{ (Bernoulli-Gleichung)}$$

- grafische Darstellung



- Technische Arbeit W_{t12} :

extern am Fluid geleistete Arbeit

z.B. Pumpe ($W_{t12} > 0$) oder Turbine ($W_{t12} < 0$)

spezifische technische Arbeit

$$w_{t12} = W_{t12}/m$$

Bernoulli-Gleichung bei technischer Arbeit zwischen Punkt 1 und 2

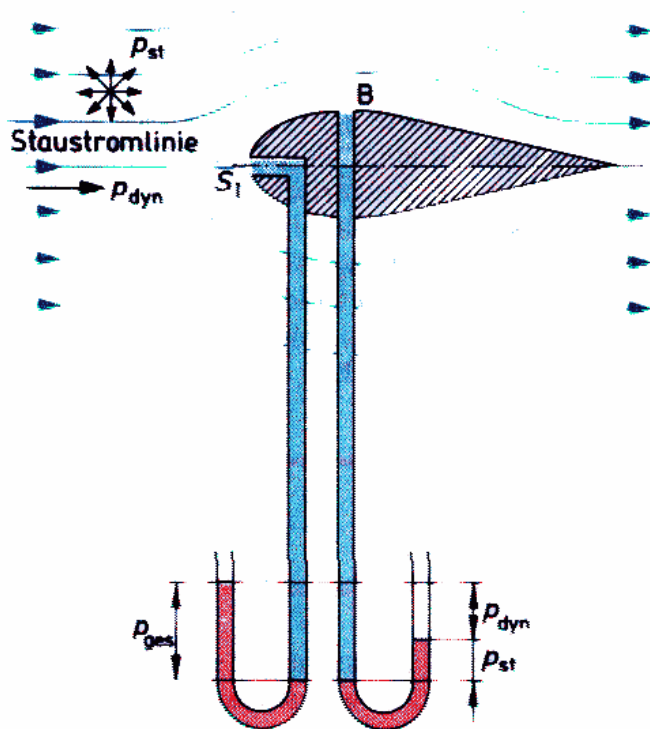
$$\rho g z_2 + p_2 + \rho/2 w_2^2 = \rho g z_1 + p_1 + \rho/2 w_1^2 + \rho w_{t12}$$

- Staudruck:

durch die Strömung verursachter dynamischer Druck $\rho/2 w^2$

wirkt nur in Strömungsrichtung

kann z.B. bei der Umströmung eines Körpers gemessen werden

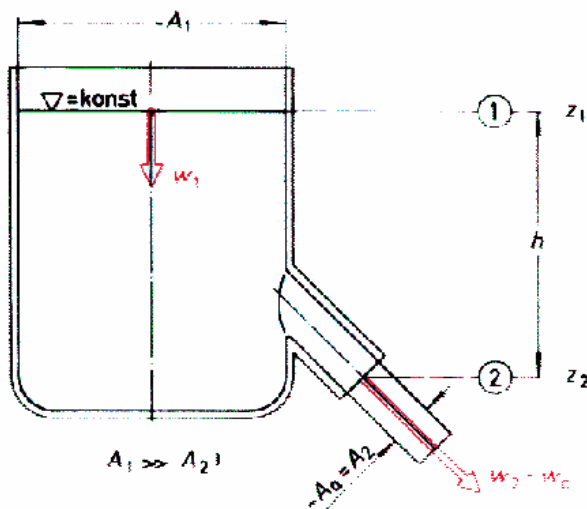


[1]

Grundprinzip des Prandtl-Rohrs zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit

- Ausfluss aus einem Behälter:

Flüssigkeit laufe reibungsfrei aus einem Gefäß



[1]

Bernoulli-Gleichung am oberen Wasserspiegel und an Austrittsöffnung

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

Drücke gleich dem Außendruck

$$p_1 = p_2 = p_a$$

Zusammenhang zwischen w_1 und w_2 aus der Kontinuitätsgleichung

$$w_1 A_1 = w_2 A_2$$

w_1 in Bernoulli-Gleichung einsetzen und nach w_2 auflösen \Rightarrow

$$w_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (A_2/A_1)^2}}$$

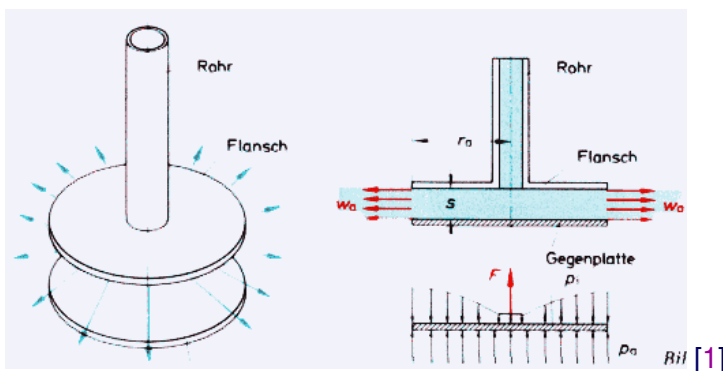
mit der Höhendifferenz $h = z_1 - z_2$

für $A_2 \ll A_1$ gilt näherungsweise die Ausflussformel von Torricelli

$$w_2 = \sqrt{2gh}$$

- Hydrodynamisches Paradoxon:

Flüssigkeit fließe aus einem Rohr zwischen zwei parallele Platten, dort radial nach außen



Größen am äußeren Rand p_a etc.

Größen irgendwo im Innenbereich der Platten p_i etc.

aus Bernoulli-Gleichung folgt

$$\frac{p_a}{\rho g} + \frac{w_a^2}{2g} = \frac{p_i}{\rho g} + \frac{w_i^2}{2g}$$
$$\Rightarrow p_i = p_a + \frac{1}{2}\rho(w_a^2 - w_i^2)$$

durchflossener Zylindermantel im Innern kleiner als außen \rightarrow

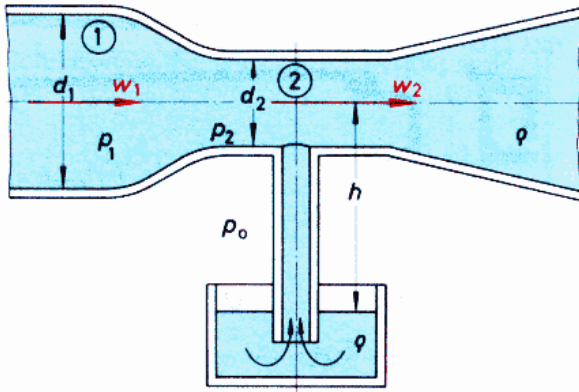
- w nimmt nach außen ab
- $w_a < w_i$
- $p_a > p_i$

Außendruck p_a gegen untere Platte drückt Platte gegen das Rohr

- Strahlpumpe:

waagerechte Rohrleitung wird verengt

an der Verengungsstelle wird ein Steigrohr angebracht



[1]

Geschwindigkeit w_2 an der Verengungsstelle mit Kontinuitätsgleichung

$$w_1 A_1 = w_2 A_2$$

$$A = \pi d^2/4$$

$$\Rightarrow w_2 = w_1 \cdot d_1^2/d_2^2 > w_1$$

Druck p_2 mit Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{\rho}{2} w_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} w_2^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2 &= p_1 - \frac{\rho}{2} (w_2^2 - w_1^2) \\ &= p_1 - \frac{\rho}{2} w_1^2 \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right) \end{aligned}$$

Geschwindigkeit w im Saugrohr bei maximaler Steighöhe h nahezu 0

bei Außendruck p_0 ergibt Bernoulli

$$p_2 + \rho g h = p_0$$

$$\Rightarrow h = (p_0 - p_2)/(\rho g)$$

häufiges Prinzip zum Pumpen oder Mischen, z.B.

Wasserstrahlpumpe

Zerstäuber

Vergaser

in der Praxis erhebliche Verluste durch Reibung und Turbulenz beim Mischen

- Aufgaben:

Aufgabe 11

Aufgabe 12

Aufgabe 13

Aufgabe 14

Aufgabe 15

Ähnlichkeitsgesetze

- Dimensionsanalyse:

Ausgangspunkt: funktionale Abhängigkeit zwischen n physikalischen Größen

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

Größen a_i haben Einheiten

können durch m Grundeinheiten beschrieben werden (3 bei Mechanik, 4 incl. Thermodynamik)

Π -Theorem: Funktion f umschreibbar mit n - m dimensionslosen Kombinationen Π_j (Kennzahlen) der a_i

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$$

- Beispiel "Erzwungene Schwingung":

Grundgleichung

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + c x = \hat{F} \cos(\omega t)$$

Einheiten der Größen

a_i	$[a_i]$
m	kg
b	kg s ⁻¹
c	kg s ⁻²
\hat{F}	kg m s ⁻²
ω	s ⁻¹
t	s

2 dimensionslose Kennzahlen

$$K_1 := \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$K_2 := \frac{b}{\sqrt{mc}}$$

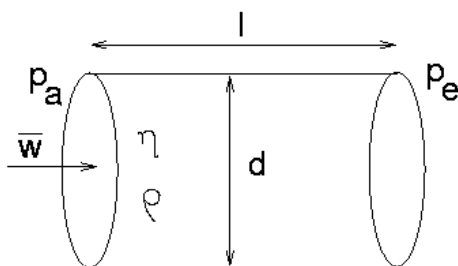
Vergleich mit den üblichen Größen bei der erzwungenen Schwingung

$$K_1 = \omega_0/\omega = 1/\eta$$

$$K_2 = 2 \delta/\omega_0 = 2 D$$

- Beispiel Rohrströmung:

- Strömung durch ein kreisrundes Rohr



beschrieben durch Beziehung

$$f(\Delta p/l, d, \bar{w}, \rho, \eta) = 0$$

zwischen den Größen

a_i	$[a_i]$	Bedeutung
$\Delta p/l$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	Druckabfall/Rohrlänge
d	m	Rohrdurchmesser
\bar{w}	m s^{-1}	mittlere Strömungsgeschwindigkeit
ρ	kg m^{-3}	Dichte des Fluids
η	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	Viskosität des Fluids

- Kennzahl K = Potenz der Größen mit Einheit 1, also

$$[K] = \left[\left(\frac{\Delta p}{l} \right)^\alpha \cdot d^\beta \cdot \bar{w}^\gamma \cdot \rho^\delta \cdot \eta^\epsilon \right] = 1$$

Vergleich der Exponenten von kg, m, s liefert

$$\alpha + \delta + \epsilon = 0 \quad (1)$$

$$-2\alpha + \beta + \gamma - 3\delta - \epsilon = 0 \quad (2)$$

$$-2\alpha - \gamma - \epsilon = 0 \quad (3)$$

- Wähle $\alpha = 1, \epsilon = 0 \Rightarrow$

$$(1) \Rightarrow \delta = -1$$

$$(3) \Rightarrow \gamma = -2$$

$$(2) \Rightarrow \beta = 1$$

$$K_1 = \left(\frac{\Delta p}{l} \right) \frac{d}{\bar{w}^2 \rho} =: \frac{\lambda}{2}$$

λ : **Rohrreibungszahl**

- Wähle $\alpha = 0, \epsilon = 1 \Rightarrow$

$$K_2 = \frac{\eta}{\rho d \bar{w}} =: \frac{1}{\text{Re}}$$

Re: **Reynoldszahl**

- Beziehung in dimensionslosen Größen also

$$F(\lambda, \text{Re}) = 0$$

oder

$$\lambda = \lambda(\text{Re})$$

- Reynolds-Zahl:

wichtigste Kennzahl reibungsbehafteter Strömungen

Definition

$$\text{Re} := w L \rho / \eta = w L / \nu$$

L: charakteristische Länge

ν : kinematische Viskosität

Verhältnis von kinetischer zu Reibungsenergie

$$\frac{\text{kinet. Energie}}{\text{Reibungsenergie}} = \frac{m w^2}{A \tau L} = \frac{\rho V w^2}{V \eta w / L} = \frac{\rho w L}{\eta}$$

charakterisiert Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung

- Froude-Zahl:

Kennzahl von Strömungen unter Schwerkraft (Gefälle, Oberflächenwellen)

Definition

$$Fr := \frac{w}{\sqrt{hg}}$$

Verhältnis von kinetischer und potentieller Energie

$$\sqrt{\frac{\text{kinet. Energie}}{\text{potenz. Energie}}} = \sqrt{\frac{mw^2}{mgh}} = \frac{w}{\sqrt{hg}}$$

ebenfalls Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zu Geschwindigkeit von Oberflächenwellen
charakterisiert Grenze zwischen gleichmäßig strömender (ruhiger Fluss) und schießender Bewegung
(Sturzbach)

- Anwendung "Modellbau":

gleiche Strömungsverhältnisse bei gleichen Kennzahlen und ähnlicher Geometrie

erlaubt Untersuchung von Strömungen mit Modellen (Wasser-, Windkanal)

Übereinstimmung aller Kennzahlen nicht immer erreichbar, z.B. bei Oberflächen-Rauheit

Grundformen reibungsbehafteter Strömung



- Strömung im Rohr:

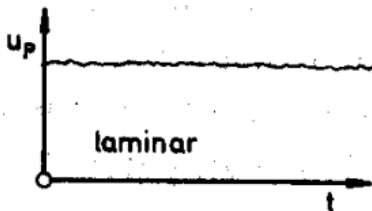
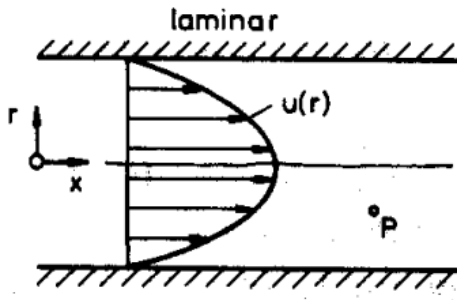
- kritische Reynoldszahl

$$Re_{krit} = \bar{w} d / \nu = 2320$$

mit mittlerer Strömungsgeschwindigkeit

$$\bar{w} = \dot{V}/A$$

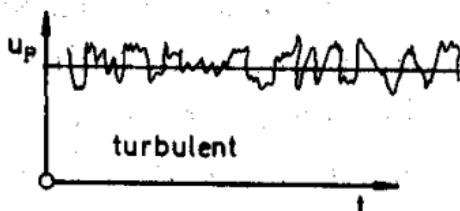
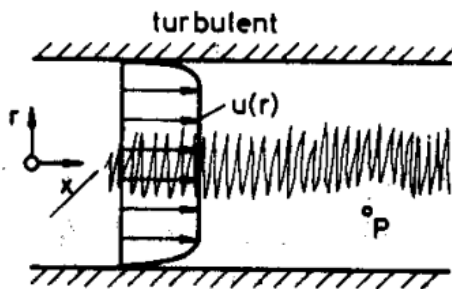
- laminare Strömung für $Re < 2320$



[2]

- parabolische Geschwindigkeitsverteilung
- Rohrreibungsverlust hängt nicht ab von der Rauheit der Rohrwand

- turbulente Strömung für $Re > 2320$



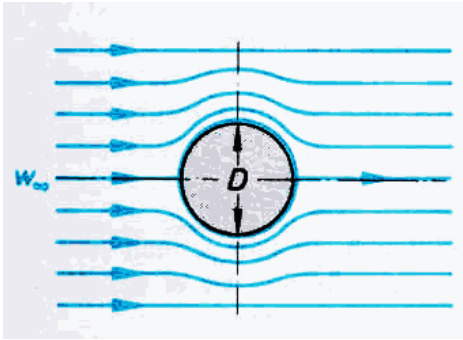
[2]

- Geschwindigkeitsverteilung wesentlich flacher
- starke Änderung nahe der Rohrwand
- Rohrreibungsverlust abhängig von der Rauheit der Rohrwand
- quasistationär: Schwankungen von mittlerer Geschwindigkeit überdeckt

- Umströmung einer Kugel:

- schleichende Umströmung bei $Re < 1000$

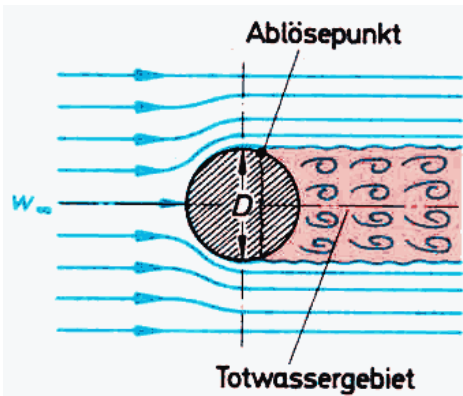
• subkritische Strömung bei $Re < 1000$



[1]

- Strömung schließt sich hinter der Kugel
- keine Wirbel
- hohe Widerstandskraft

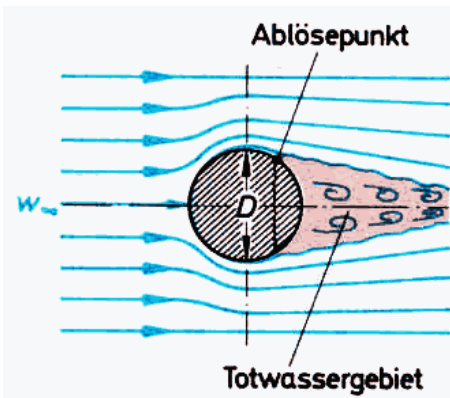
◦ unterkritische Strömung bei $1000 < Re < 3 \cdot 10^5$



[1]

- laminare Grenzschicht um Kugel
- Grenzschicht löst sich nahe der dicksten Stelle
- großes Wirbelgebiet hinter der Kugel (Totwassergebiet)
- mittlere Widerstandskraft

◦ überkritische Strömung bei $Re > 3 \cdot 10^5$



[1]

- turbulente Grenzschicht
- Grenzschicht löst sich hinter der Kugel
- kleines Totwassergebiet
- sehr niedrige Widerstandskraft

• Aufgaben:

Aufgabe 16

Aufgabe 17

Aufgabe 18

Strömung in Rohren



- Energiegleichung für reibungsbehaftete Strömungen
- Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren
- Turbulente Strömung in kreisförmigen Rohren

Energiegleichung für reibungsbehaftete Strömungen



- Energiebilanz mit Reibung:

betrachten stationäre Strömung im Gravitationsfeld

Vergleich der spezifischen Energien an Punkten P_1 und P_2 einer Stromröhre

$$g z_1 + 1/2 w_1^2 + p_1 / \rho = g z_2 + 1/2 w_2^2 + p_2 / \rho + e_{\text{Dissipation}}$$

vorgegebener Volumenstrom $\dot{V} = A w \rightarrow$

- w ändert sich nicht
- Reibungsverlust äußert sich als Druckverlust

$$e_{\text{Dissipation}} = \Delta p_V / \rho$$

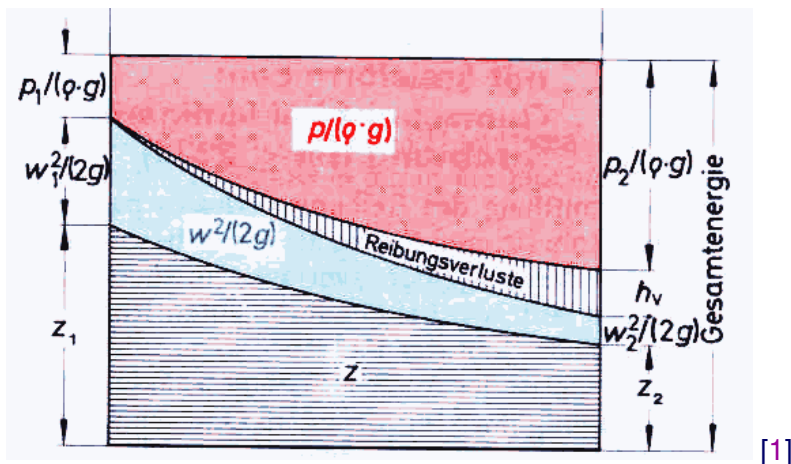
- Reibungsverlusthöhe h_V :

Definition

$$h_V = \Delta p_V / \rho g$$

Division der Energiebilanz durch $g \rightarrow$ Größen der Dimension Länge

im Bild



h_V = zusätzlich benötigte Höhe für gleichen Druck wie ohne Reibung

h_V = Verringerung der Förderhöhe einer Pumpe durch Reibung

- Widerstandszahl ζ :

häufig Dissipationsenergie proportional zur kinetischen Energie

Proportionalitätskonstante ζ

$$e_{\text{Dissipation}} = \zeta w^2 / 2$$

Druckverlust

$$\Delta p_V = \rho e_{\text{Dissipation}} = \frac{1}{2} \zeta \rho w^2$$

Widerstandszahl für viele Rohrleitungselemente tabelliert

oft nur leichte Abhängigkeit von Reynoldszahl und Wandrauheit

Dissipation eines Rohrsystems = Summe der Dissipationen der Elemente (Reihenschaltung)

Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren

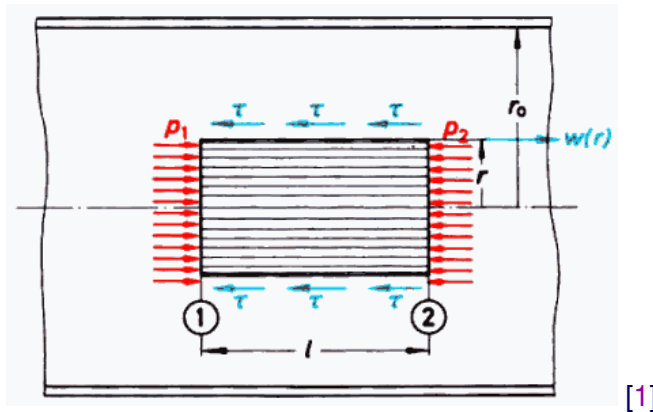


- Geschwindigkeitsprofil im Rohr:

Geschwindigkeit an der Rohrwand = 0 (**Haftbedingung**)

laminare Strömung →

- achsenparallele Schichten
- w hängt nur vom Radius r ab



Schubspannung aufgrund unterschiedlicher Geschwindigkeit

$$\tau = -\eta \frac{dw}{dr}$$

entsprechende Reibungskraft am Zylinder

$$\begin{aligned} F_R &= A\tau \\ &= 2\pi r l \left(-\eta \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned}$$

äußere Druckkraft auf Zylinder

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$$

Kräftegleichgewicht ⇒

$$dw = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r dr$$

Integrieren ⇒

$$w(r) = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C$$

Integrationskonstante aus Randbedingung $w(r_0) = 0 \Rightarrow$

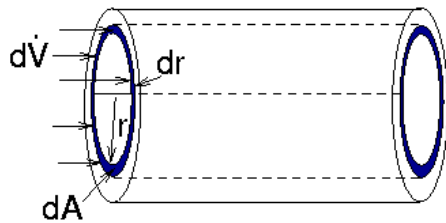
$$w(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (r_0^2 - r^2) \quad \text{Stokessches Gesetz}$$

maximale Geschwindigkeit bei $r = 0$:

$$w_{max} = \frac{r_0^2 (p_1 - p_2)}{4\eta l}$$

- Bestimmung des Volumenstroms:

Strom durch dünnen Zylinderring



$$d\dot{V} = w(r) dA$$

$$= w(r) 2\pi r dr$$

Integrieren

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^{r_0} w(r) r dr$$

$$= 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr$$

$$= \frac{\pi r_0^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \quad \text{Gesetz von Hagen-Poiseuille}$$

- Mittlere Geschwindigkeit \bar{w} :

definiert durch

$$\dot{V} = A \bar{w}$$

mit Hagen-Poiseuille

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{A}$$

$$= \frac{\pi r_0^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l \pi r_0^2}$$

$$= \frac{r_0^2 (p_1 - p_2)}{8\eta l}$$

$$= \frac{1}{2} w_{max}$$

- Druckabfall:

◦ mit

$$r_0 = d/2$$

$$\eta = \nu \rho$$

folgt aus Hagen-Poiseuille

$$p_1 - p_2 = \frac{128 \nu \rho l}{\pi d^4} \dot{V}$$

◦ setzt man noch

$$\dot{V} = \bar{w} \pi d^2/4$$

ergibt sich

$$p_1 - p_2 = 32 \nu \rho l \bar{w}/d^2$$

- Dimensionslose Form:

dimensionslose Rohrreibungszahl

$$\lambda = \frac{\Delta p}{l} \frac{2d}{\bar{w}^2 \rho}$$

$p_1 - p_2$ von oben einsetzen \Rightarrow

$$\lambda = 64 \frac{\nu}{d\bar{w}} = \frac{64}{\text{Re}}$$

Vergleich mit der Definition der Widerstandszahl liefert

$$\zeta = \lambda l/d$$

- Aufgaben:

Aufgabe 19

Turbulente Strömung in kreisförmigen Rohren



- Turbulenz im Rohr:

ab $Re > 2320$

bei fast allen praktischen Rohrströmungen

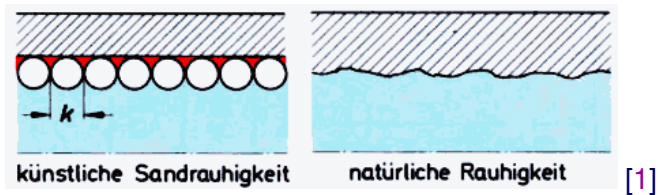
Reibungsverluste durch Schubspannungen und durch turbulente Vermischung

Unebenheiten in der Rohrwand sehr wichtig

- Wandrauheit k :

angegeben als durchschnittliche Höhe der Unebenheiten

statt natürlicher Unregelmäßigkeit bezogen auf eine "gleichmäßig rauhe" Oberfläche (**Sandrauheit**)



einige typische Werte (nach [1] Tafel 31)

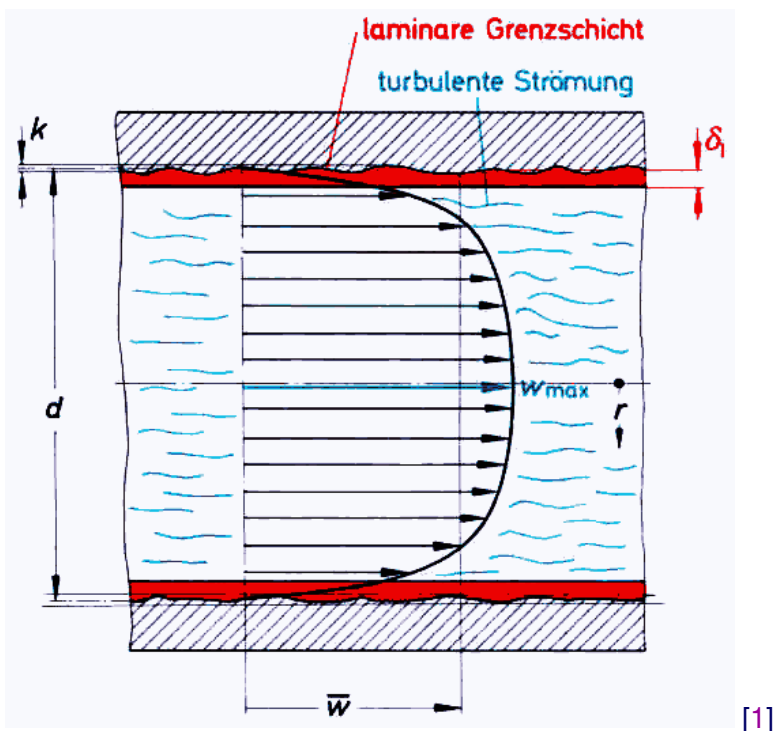
Material	Zustand	k /[mm]
gezogenes Metallrohr	neu	0.0013
Gummischlauch	neu	0.0016
Gusseisen	neu	0.2 - 0.6
	leicht angerostet	0.5 - 1.5
Betonrohr	neu	0.3 - 0.8

damit 3 dimensionslose Kennzahlen der Rohrströmung:

- Re
- λ
- k/d

- Geschwindigkeitsverteilung:

grundsätzliches Verhalten



in der Nähe der Rohrwand ($r = d/2 =: r_0$)

- $w(r_0) = 0$
- \rightarrow Re klein in direkter Nähe zur Wand
- \rightarrow laminare Strömung in der Grenzschicht
- \rightarrow parabolisches Geschwindigkeitsprofil

halbempirische Beziehung für die Dicke δ_l (Prandtl)

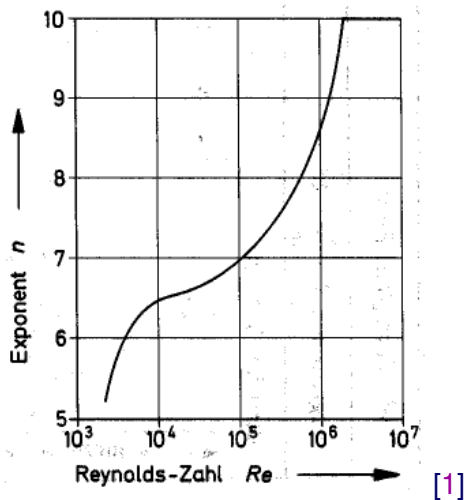
$$\frac{\delta_l}{d} \approx \frac{62.7}{\text{Re}^{7/8}}$$

Näherung für $w(r)$ im turbulenten Bereich

$$w(r)/w_{\max} = (1 - r/r_0)^{1/n}$$

Exponent n hängt von Re und k/d ab, wächst mit k/d

bei glatten Rohren (k/d klein) erhält man n aus dem Bild



- Mittlere Geschwindigkeit \bar{w} :

durch den Volumenstrom gegeben als

$$\bar{w} = \dot{V} / A = \dot{V} / (\pi r_0^2)$$

Integrieren des Volumenstroms über dünne Zylinderschalen wie beim laminaren Fall liefert:

$$\bar{w} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r w(r) dr$$

Einsetzen des Potenzansatzes ergibt

$$\frac{\bar{w}}{w_{\max}} = 2 \int_0^1 x(1-x)^{1/n} dx$$

partielle Integration (oder eine Integraltafel) liefert schließlich

$$\frac{\bar{w}}{w_{\max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$$

einige Werte

n	\bar{w}/w_{\max}
6	0.7912
7	0.8167
8	0.8366
9	0.8526

- Druckabfall:

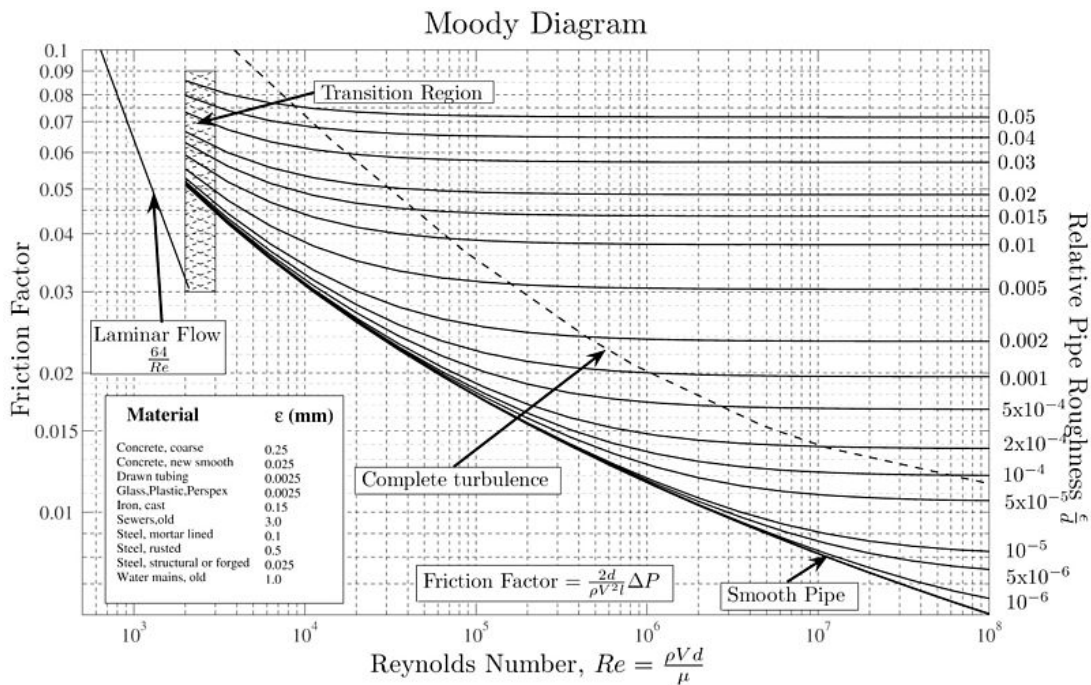
direkt aus der Definition der Rohrreibungszahl λ

$$\Delta p_V = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2$$

grundlegende Beziehung

$$\lambda = \lambda(\text{Re}, k/d)$$

graphisch



[12]

- Einige halbempirische Beziehungen für verschiedene Bereiche

hydraulisch glatte Rohre ($Re \cdot k/d < 65$)

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \quad \text{bei } Re < 10^5 \quad (\text{Blasius})$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.03 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad \text{bei } Re > 10^5 \quad (\text{Prandtl})$$

hydraulisch raue Rohre ($Re \cdot k/d > 1300$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 2 \lg\left(\frac{k}{d}\right) \quad (\text{Nikuradse})$$

Übergangsbereich ($65 < Re \cdot k/d < 1300$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \lg\left(\frac{2k}{d} + \frac{18.7}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \quad (\text{Colebrook})$$

- Aufgaben:

Aufgabe 20

Aufgabe 21

Aufgaben



- 🔦 Aufgabe 1
- 🔦 Aufgabe 2
- 🔦 Aufgabe 3
- 🔦 Aufgabe 4
- 🔦 Aufgabe 5
- 🔦 Aufgabe 6
- 🔦 Aufgabe 7
- 🔦 Aufgabe 8
- 🔦 Aufgabe 9
- 🔦 Aufgabe 10
- 🔦 Aufgabe 11
- 🔦 Aufgabe 12
- 🔦 Aufgabe 13
- 🔦 Aufgabe 14
- 🔦 Aufgabe 15
- 🔦 Aufgabe 16
- 🔦 Aufgabe 17
- 🔦 Aufgabe 18
- 🔦 Aufgabe 19
- 🔦 Aufgabe 20
- 🔦 Aufgabe 21

Aufgabe 1



- Um die Kontinuumsannahme zu überprüfen, soll die Zahl der Moleküle abgeschätzt werden in
 - a. einem Wassertropfen (Kugel, $d = 5 \text{ mm}$)
 - b. der Düse eines Vergasers (Zylinder, Durchmesser 1.5 mm , Höhe 2 cm , Luft bei 20 °C und 1 bar)
 - c. 1 cm^3 Luft bei 20 °C in einem Ultrahoch-Vakuum ($p = 10^{-12} \text{ Pa}$)
- Lösung

Aufgabe 2



- Um wieviel Prozent nimmt die Dichte von anfangs trockener Luft von 19.3 °C und 0.997 bar ab, wenn die Luftfeuchtigkeit auf 78 % steigt (bei konstantem T und p)?

- Partialdruck p_S des Wasserdampfs bei 19.3 °C:

$$p_S = 0.02239 \text{ bar}$$

- Lösung

Aufgabe 3



- Die Schallgeschwindigkeit von Luft bei 0 °C und Normaldruck beträgt $a_0 = 331.4$ m/s.
 - a. Bestimmen Sie eine lineare Näherungsformel für a , die für Temperaturen in der Nähe von 0 °C gilt.
 - b. Ermitteln Sie damit a für 20 °C und 100 °C und vergleichen Sie mit den genauen Werten.
- Lösung

Aufgabe 4

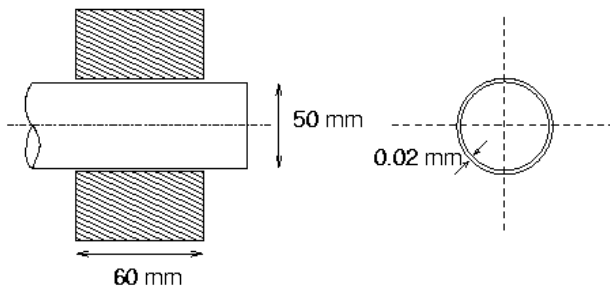


- Eine Platte von 1 m^2 wird mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s über eine andere Platte im Abstand von 1 mm gezogen. Zwischen beiden Platten befindet sich
 - a. Wasser bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\eta = 1.00 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$),
 - b. Luft bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\eta = 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(s m)}$).
- Bestimmen Sie jeweils Kraft und Spannung sowie die Verlustleistung der Dissipation.
- Lösung

Aufgabe 5



- Ein Zapfen mit einem Durchmesser $d = 50 \text{ mm}$ hat in einer Aufnahmebohrung der Länge $l = 60 \text{ mm}$ ein Spiel (= Differenz der Durchmesser) von $s = 0.04 \text{ mm}$. Im Spalt befindet sich Spindelöl bei 60 °C ($\eta = 4.179 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$).

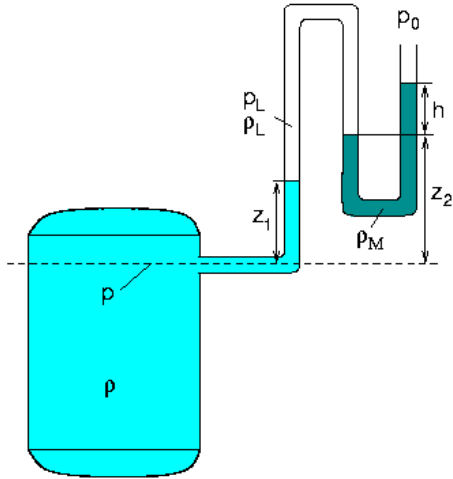


- Wie groß sind Schubspannung, Reibungsmoment und Verlustleistung, wenn der Zapfen zentrisch mit einer Drehzahl $n = 3000 \text{ U/min}$ läuft?
- Hinweis:
Die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt kann näherungsweise als linear angenommen werden.
- Lösung

Aufgabe 6



- In ein U-Rohr-Manometer mit Quecksilber sei eine Luftblase eingeschlossen:



Bestimmen Sie den Überdruck im mit Wasser gefüllten Kessel, wobei Sie das Gewicht der Luftblase vernachlässigen können.

- Werte:

$$z_1 = 0.6 \text{ m}$$

$$z_2 = 0.8 \text{ m}$$

$$h = 0.32 \text{ m}$$

$$\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_M = 13600 \text{ kg/m}^3$$

- Lösung

Aufgabe 7

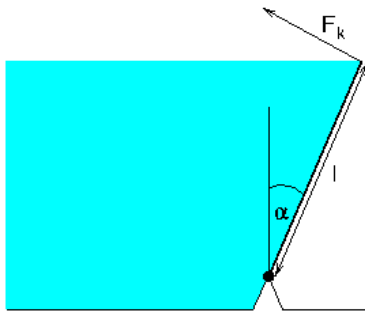


- Im Zentrum einer Zentrifuge befindet sich ein Reagenzglas mit einem Durchmesser von 1 cm und einer Höhe von 25 cm, teilweise gefüllt mit einer wässrigen Lösung ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Die Drehzahl betrage $n = 4000 \text{ U/min}$.
 - a. Wie hoch darf das Reagenzglas höchstens gefüllt sein, damit keine Flüssigkeit überläuft?
 - b. Welcher Druck herrscht dann an der Wand in 1 cm Höhe?
 - c. Was geschieht bei einer Drehzahl von $n = 6000 \text{ U/min}$?
- Lösung

Aufgabe 8



- Eine geneigte Verschlussklappe, Länge l , Breite b , die durch ein Seil gehalten wird, begrenzt ein Wasservolumen:



Welche Kraft F_k wirkt auf das Seil?

- Werte:

$$l = 1.20 \text{ m}$$

$$b = 1.00 \text{ m}$$

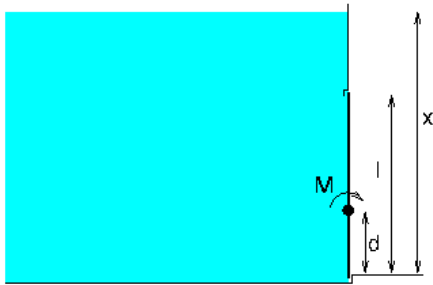
$$\alpha = 30^\circ$$

- Lösung

Aufgabe 9



- Eine in einen Wasserbehälter eingebaute quadratische Klappe (Seitenlänge $l = 1 \text{ m}$) ist im Punkt M (in der Höhe $d = 0.45 \text{ m}$) um eine horizontale Achse drehbar.



Bei welcher Höhe x des Wasserspiegels öffnet sich die Klappe selbsttätig?

- Lösung

Aufgabe 10



- Gegeben sei das zweidimensionale stationäre Strömungsfeld

$$\vec{w} = (u, v) = \omega (-y, x)$$

- Stellen Sie die Strömung graphisch dar.
 - Berechnen Sie die Bahnlinien.
 - Bestimmen Sie die Stromlinien.
 - Am Punkt $\vec{x}_0 = (1, 0)$ werden Markierungsteilchen eingeleitet. Bestimmen Sie die entstehende Streichlinie.
- Lösung

Aufgabe 11



- In einem Autoreifen, der unter einem Druck von 2.2 bar steht, befindet sich ein kleines Loch. Der Außendruck beträgt 1 bar, die Temperaturen sind außen und innen gleich 20 °C. Mit welcher Geschwindigkeit strömt die Luft aus?

- Hinweis:

Vernachlässigen Sie die Strömungsgeschwindigkeit im Reifen und nehmen Sie an, die Dichte der ausströmenden Luft sei direkt am Innenrand des Lochs noch so groß wie im Innern des Reifens.

$$R_i = 287.2 \text{ J/(kg K)}$$

- Lösung

Aufgabe 12



- Ein zylindrischer Wasserbehälter mit einer Querschnittsfläche von 1200 cm^2 sei 50 cm hoch mit Wasser gefüllt. Er werde durch eine Bodenöffnung mit 4 cm^2 entleert. Wie lange dauert die Entleerung?

- Hinweise:

Die Wasserstandshöhe z nimmt in der kurzen Zeit dt ab um

$$dz = -w_1 dt$$

Benutzen Sie die Formel für die Ausflussgeschwindigkeit, um daraus eine Differentialgleichung für $z(t)$ zu erhalten. Lösen Sie diese durch Trennung der Variablen und setzen Sie die gegebenen Werte ein.

- Lösung

Aufgabe 13

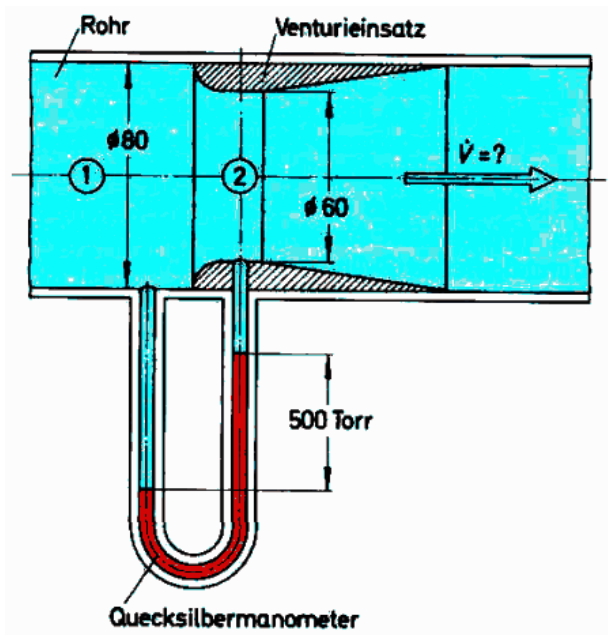


- In einem Vergaser wird Luft durch eine Düse beschleunigt. Durch ein kleines Loch der Querschnittsfläche 2 mm^2 in der Düse wird dabei der Kraftstoff 2 cm hochgesaugt. Wie groß muss die Geschwindigkeit der Luft in der Düse sein, wenn 7.2 l/h Kraftstoff angesaugt werden sollen?
- Werte
 - Dichte der Luft: $\rho_L = 1.2 \text{ kg/m}^3$
 - Dichte des Kraftstoffs: $\rho_K = 840 \text{ kg/m}^3$
- Hinweis:
 - Stellen Sie für die einströmende Luft und den angesaugten Kraftstoff jeweils die Energiebilanz auf.
 - Vernachlässigen Sie dabei die Anfangsgeschwindigkeit der angesaugten Luft sowie Reibungseffekte.
- Lösung

Aufgabe 14



- Zur Messung der Durchflussmenge in einem Rohr wird eine Verengungsstelle eingebaut und der Druckabfall gegenüber dem freien Rohr gemessen (**Venturirohr**)



[1]

- Wie groß ist der Wasserstrom ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$), wenn bei einer Verengung von $d_1 = 80 \text{ mm}$ auf $d_2 = 60 \text{ mm}$ der Druck um 666.7 mbar absinkt?
- Lösung

Aufgabe 15



- Eine Pumpe der Leistung $P = 2 \text{ kW}$ pumpt Wasser ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) aus einem Behälter durch ein Rohr mit einem Durchmesser von 70 mm nach oben. Die Strömungsgeschwindigkeit betrage 5 m/s. Wie hoch kommt das Wasser, wenn der Druck oben und unten am Rohr gleich groß sein sollen ?
- Lösung

Aufgabe 16



- Bestimmen Sie die Reynoldszahlen der folgenden Strömungen:
 - a. Blutfluss ($\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$) in den Kapillaren ($d = 8 \text{ }\mu\text{m}$, $\bar{w} = 5 \text{ mm/s}$) und in der Aorta ($d = 20 \text{ mm}$, $\bar{w} = 0.3 \text{ m/s}$)
 - b. Rohrströmung, $d = 10 \text{ cm}$, $\bar{w} = 1 \text{ m/s}$, mit Wasser ($\nu = 1.00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$), Getriebeöl ($\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$) und Luft ($\nu = 1.56 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)
- Lösung

Aufgabe 17



- Die bei Orkan an Hochspannungsleitungen auftretenden Strömungskräfte sollen in einem Wasserkanal modelliert werden. Die Werte beim Original betragen

Windgeschwindigkeit	$v_0 = 120 \text{ km/h}$
Drahtdurchmesser	$d_0 = 1.0 \text{ cm}$
Oberflächenrauheit	$k_0 = 0.02 \text{ mm}$
kinemat. Viskosität	$\nu_0 = 1.39 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Das Wasser ($\nu_M = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) fließe mit $v_M = 0.3 \text{ m/s}$. Welchen Durchmesser und welche Rauheit muss der Modelldraht haben?

- Lösung

Aufgabe 18



- Eine geschickte Aufschlagtechnik im Volleyball bewirkt, dass der Ball mitten im Flug plötzlich steiler fällt. Wie schnell ist er dann ? (Durchmesser $d = 21 \text{ cm}$, $\nu_{\text{Luft}} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$)
- Lösung

Aufgabe 19



- Durch eine Rohrleitung von 50 mm Durchmesser und 1 km Länge fließen stündlich 10 m^3 Heizöl mit $\nu = 4.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ und einer Dichte von 900 kg/m^3 . Wie groß ist der für den Transport erforderliche Druckunterschied?
- Lösung

Aufgabe 20

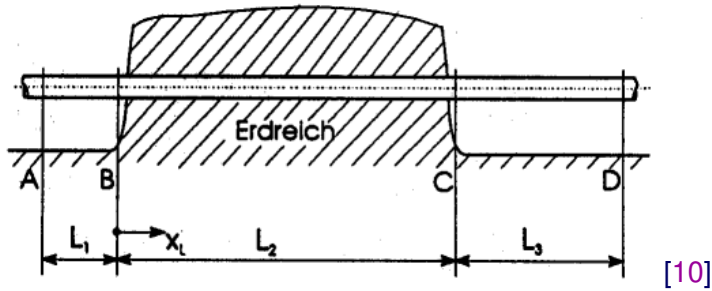


- Durch eine horizontale Stahlrohrleitung von 2 km Länge und 50 cm Durchmesser gehen in der Stunde 1200 m^3 Wasser von $15 \text{ }^\circ\text{C}$. Wie groß ist der entstehende Druckverlust, wenn die Rauheit 0.1 mm beträgt?
- Lösung

Aufgabe 21



- Eine horizontale, hydraulisch glatte Wasserleitung verläuft teilweise unzugänglich durch Erdreich



An der unzugänglichen Stelle zwischen B und C wird ein Leck vermutet.

- Um den Volumenstrom und den Ort des Lecks zu bestimmen, misst man den Druck an den Stellen A, B, C und D. Man erhält folgende Werte:

$$d = 0.05 \text{ m}$$

$$L_1 = L_3 = 1000 \text{ m}, L_2 = 1500 \text{ m}$$

$$p_A = 6 \text{ bar}, p_B = 4 \text{ bar}, p_C = 1.5 \text{ bar}, p_D = 1 \text{ bar}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

- Bestimmen Sie die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten \bar{w} und die Reynoldszahlen jeweils in den Teilstücken AB und CD.

Hinweis: Verwenden Sie die Formel von Blasius und prüfen Sie hinterher, ob dies gerechtfertigt war.

- Bestimmen Sie nun den Volumenstrom des Lecks.
- Ermitteln Sie schließlich den Ort des Lecks.

- Lösung

- Literatur
- Nachweise

- S. Bschorer, K. Költzsch: Technische Strömungslehre
Springer Vieweg, 12. Aufl. 2021, ISBN: 978-3658304065
- H. Oertel, M. Böhle, T. Reviol: Strömungsmechanik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
Springer Vieweg, 7. Aufl. 2015, ISBN: 978-3658077853
- H. Oertel, M. Böhle, T. Reviol: Übungsbuch Strömungsmechanik
Vieweg+Teubner, 8. Aufl. 2012, ISBN: 978-3834818034
- H. Sigloch: Technische Fluidmechanik
Springer Vieweg, 10. Aufl. 2017, ISBN: 978-3662544662
- G. Cerbe, G. Wilhelms: Technische Thermodynamik
Carl Hanser, 19. Aufl. 2021, ISBN: 978-3446465190

1. W.Bohl, Technische Strömungslehre, Vogel, 11. Aufl 1998, ISBN: 3-8023-1740-8
2. K.Gersten, Einführung in die Strömungsmechanik, Vieweg, 6. Aufl 1991, ISBN 3-528-43344-2
3. Bild [Ocean current 2004.jpg](#) aus der freien Enzyklopädie [Wikipedia](#) ist gemeinfrei. Der Urheber des Bildes ist die US Navy.
4. Bild [A closeup of an erupting prominence with Earth inset at the approximate scale of the image.](#)
Copyright: SOHO (ESA & NASA).
5. Bild [Grafik_blutkreislauf.jpg](#) aus der freien Enzyklopädie [Wikipedia](#) und steht unter der [Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 License](#).. Der Urheber des Bildes ist User:Sansculotte.
6. DLR-Press-Mitteilung 29. Mai 2007, [C²A²S²E - Flugzeuge aus dem Computer](#).
7. Eva Brussies, [Simulation der Zylinderinnenströmung eines Zweiventil-Dieselmotors mit einem skalenauflösenden Turbulenzmodell](#), Dissertation TU Darmstadt 2013.
8. Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf, [Validierung von CFD Codes für komplexe Strömungen](#).
9. Bild [Vortex-street-animation.gif](#) aus der freien Enzyklopädie [Wikipedia](#). Der Urheber des Bildes ist Cesareo de La Rosa Siqueira.
10. H. Iben: Strömungslehre in Fragen und Aufgaben, Teubner 1997, ISBN: 3-8154-3033-X
11. im Rahmen des Skylab-3-Programms aufgenommen. Es stammt von der NASA ([Quelle](#)) und ist gemeinfrei (public domain).
12. Bild [Moody_diagram.jpg](#) aus der freien Enzyklopädie [Wikipedia](#) und steht unter der [Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International license](#). Urheber des Bildes sind SBeck and R Collins, University of Sheffield, Konversion zu SVG: User:Marc.derumaux.
13. Bild [Schlierenfoto_Mach_1-2_Pfeilflügel_-_NASA.jpg](#) aus der freien Enzyklopädie [Wikipedia](#) und ist public domain.
14. Ulmer Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen, [Downloads zum Praktikum SiSo](#).

Lösung von Aufgabe 1



a. Zahl der Moleküle im Wassertropfen:

Volumen des Tropfens

$$V = 4 \pi r^3/3 = 6.54 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$$

Masse daher (mit Dichte von Wasser $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

$$m = \rho V = 6.54 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$

Zahl der Teilchen (mit Molmasse $M = 18 \text{ g/mol}$, Avogadrozahl $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}/\text{mol}$)

$$N = N_A m/M = 2.19 \cdot 10^{21}$$

b. Zahl der Moleküle in der Düse eines Vergasers:

Volumen des Zylinders

$$V = h \pi d^2/4 = 3.53 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$$

Zahl der Teilchen dann mit Gasgleichung (wobei $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)

$$N = p V / (k_B T) = 8.73 \cdot 10^{17}$$

c. genauso beim Ultrahoch-Vakuum:

Zahl der Moleküle

$$N = p V / (k_B T) = 247.2$$

Hier gilt die Kontinuumsannahme sicher nicht mehr.

Lösung von Aufgabe 2



- Relative Änderung der Dichte

$$\rho_f / \rho_{tr} = 1 - 0.337 \phi p_S/p = 0.9934$$

- \Rightarrow Dichte nimmt um 0.66 % ab.

Lösung von Aufgabe 3



a. Lineare Näherungsformel für a:

- Lineare Näherung einer Funktion $f(x)$ bei x_0 durch Tangente

$$\hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(Taylorentwicklung 1. Ordnung)

Für $a(T)$ also

$$\begin{aligned}\hat{a}(T) &= a(T_0) + a'(T_0)(T - T_0) \\ &= a(T_0) + \frac{\sqrt{\kappa R_i}}{2\sqrt{T_0}}(T - T_0)\end{aligned}$$

- Mit den Werten

- $\kappa = 1.40$
- $R_i = 287.2 \text{ J/(kg K)}$
- $T_0 = 273.15 \text{ K}$

und t in $^\circ\text{C}$ erhält man

$$\hat{a}(t) = 331.4 \text{ m/s} + 0.607 \text{ (m/s)/}^\circ\text{C } t$$

b. Einsetzen in Beziehungen für a und \hat{a} liefert

t [$^\circ\text{C}$]	\hat{a} [m/s]	a [m/s]
20	343.5	343.3
100	392.1	387.3

Lösung von Aufgabe 4



a. Werte bei Wasser:

Spannung:

$$\tau = \eta \frac{dw}{dz} = \eta \frac{w}{h} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Kraft:

$$F = \tau A = 1 \text{ N}$$

Verlustleistung

$$P_V = F w = 1 \text{ W}$$

b. Analog für Luft mit dem angegebenen Wert für η

$$\tau = 1.82 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2$$

$$F = 1.82 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$P_V = 1.82 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

Lösung von Aufgabe 5



- Geschwindigkeit am Lager

$$w = n \pi d = 7.854 \text{ m/s}$$

- Schubspannung

$$\tau = \eta \, dw/dz \approx \eta \, w/(s/2) = 1641 \text{ N/m}^2$$

- Wandkraft

$$F = \tau A = \tau l \pi d = 15.47 \text{ N}$$

- Reibungsmoment

$$M_R = F d/2 = 0.3867 \text{ N m}$$

- Verlustleistung

$$P_V = F w = 121.5 \text{ W}$$

Lösung von Aufgabe 6



- Druck an der Grenzschicht Wasser - Luft:

$$p_L = p - \rho_W g z_1$$

- Bei Vernachlässigung des Gewichts der Luftsäule herrscht der Druck p_L auch an der Grenzschicht Luft - Quecksilber. Daher:

$$p_L = p_0 + \rho_M g h$$

- Daher gilt insgesamt

$$p - p_0 = \rho_M g h + \rho_W g z_1 = 0.486 \text{ bar}$$

Lösung von Aufgabe 7



a. Maximale Füllhöhe des Reagenzglases:

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt

$$\omega = 2 \pi n = 418.9 \text{ 1/s}$$

Ruhelage h_0 liegt in der Mitte zwischen Tiefst- und Höchststand

$$h_0 = (h_{\min} + h_{\max})/2$$

Aus der Gleichung für die Oberfläche folgt

$$h_{\max} = h_{\min} + \omega^2 R^2 / (2g)$$

Elimination von h_{\min} liefert somit

$$h_0 = h_{\max} - \omega^2 R^2 / (4g)$$

Bei Maximalstand ist $h_{\max} = h$, also

$$h_0 = 13.8 \text{ cm.}$$

b. Druck an der Wand:

Der Scheitel der Parabel hat die Höhe

$$h_{\min} = 2 h_0 - h_{\max} = 2.6 \text{ cm,}$$

daher ist das z in der Formel für den Druck (ab h_{\min} gemessen!)

$$z = 1 \text{ cm} - h_{\min} = -1.6 \text{ cm}$$

Damit

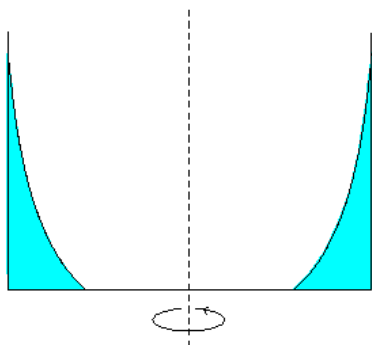
$$p = p_0 + (1/2) \rho \omega^2 R^2 - \rho g z = p_0 + 2350 \text{ Pa}$$

c. Verhalten bei 6000 U/min:

Bei $n = 6000$ U/min ist

$$\omega^2 R^2 / (4g) = 25.2 \text{ cm} > h$$

Ein großer Teil des Bodens ist unbedeckt, die Flüssigkeit befindet sich hauptsächlich an der Wand



Lösung von Aufgabe 8



- Schwerpunkt liegt in der Mitte, Tiefe

$$h_S = \frac{1}{2}l \cos \alpha = 0.5196 \text{ m}$$

- damit Druckkraft auf Klappe

$$F = \rho g h_S b l = 6117 \text{ N}$$

- Trägheitsmoment

$$I_S = l^3 b / 12 = 0.144 \text{ m}^4$$

- Lage des Angriffspunkts

$$w_D = w_S + e = w_S + \frac{I_S}{w_S A} = 0.8 \text{ m}$$

- Momentengleichgewicht um Gelenk

$$\begin{aligned} F_k l &= F(l - w_D) \\ \Rightarrow F_k &= \left(1 - \frac{w_D}{l}\right)F = F/3 = 2039 \text{ N} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 9



- Klappe öffnet sich, wenn der Angriffspunkt D oberhalb des Drehpunkts liegt, also bei

$$e < (l/2) - d$$

- Es war

$$e = I_S / (w_S A)$$

- Tiefe des Schwerpunkts bei Füllhöhe x

$$w_S = x - l/2$$

- Trägheitsmoment

$$I_S = l^4/12$$

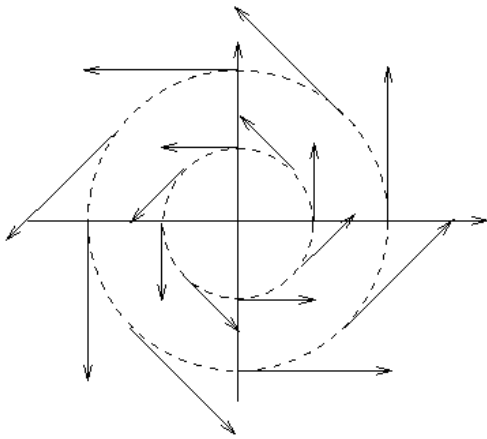
- Fläche

$$A = l^2$$

- In e einsetzen und Ungleichung nach x auflösen →

$$x > \frac{l}{2} + \frac{l^2}{12(l/2 - d)} = 2.17 \text{ m}$$

Lösung von Aufgabe 10



a.

b. Bahnlinien für $\vec{x} = (x, y)$ aus $d\vec{x}/dt = \vec{w}$:

In Koordinaten lautet die Dgl:

$$\dot{x} = -\omega y \quad (1)$$

$$\dot{y} = \omega x \quad (2)$$

(1) ableiten und (2) einsetzen \rightarrow

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y} = -\omega^2 x$$

Schwingungsdgl., also Lösung für x:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$$

in (1) einsetzen \rightarrow

$$y(t) = -\dot{x}/\omega = a \sin(\omega t + \varphi)$$

also

$$\vec{x}(t) = a \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi) \\ \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Kreise um den Ursprung. Radius a und Phase φ aus den Anfangsbedingungen.

c. Stromlinien:

aus

$$dy/dx = v/u = -x/y$$

$$\Rightarrow y dy = -x dx$$

$$\Rightarrow 1/2 y^2 = -1/2 x^2 + C$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 2C$$

Kreise um den Ursprung, Radius durch Anfangspunkt gegeben.

d. Streichlinien:

Zunächst Anfangsbedingung bei Bahnlinien einbauen

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t_0) = a \begin{pmatrix} \cos(\omega t_0 + \varphi) \\ \sin(\omega t_0 + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = 1, \quad \varphi = -\omega t_0$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) \\ \sin(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\sin(\omega(t - t_0))}$$

Zu jeder festen Zeit t ist dies ein Kreis um den Ursprung mit Radius 1, beschrieben durch den Parameter t_0 .

Lösung von Aufgabe 11



- Nach Bernoulli gilt für die Werte im Innern (Index i) und am Loch (Index a):

$$p_i/(\rho g) + w_i^2/(2g) = p_a/(\rho g) + w_a^2/(2g)$$

wobei ρ am Loch gleich dem im Innern sei.

- Wegen

$$w_i \approx 0$$

folgt

$$w_a = \sqrt{\frac{2(p_i - p_a)}{\rho}}$$

- Die Dichte bestimmt man mit der idealen Gasgleichung:

$$p V = m R_i T$$

$$\Rightarrow \rho = m/V = p_i/(R_i T) = 2.61 \text{ kg/m}^3$$

- Damit ist

$$w_a = 303.2 \text{ m/s}$$

- Es war

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{A_2}{A_1} w_2 \\
 &= \frac{A_2}{A_1} \sqrt{\frac{2gz}{1 - (A_2/A_1)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{2gz}{(A_1/A_2)^2 - 1}} \\
 &= \alpha \sqrt{z}
 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$\alpha := \sqrt{\frac{2g}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

- In der Zeit dt sinkt der Wasserspiegel um

$$\begin{aligned}
 dz &= -w_1 dt \\
 &= -\alpha \sqrt{z} dt \\
 \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z}} &= -\alpha dt
 \end{aligned}$$

Integrieren von der Anfangszeit $t = 0$ mit der Höhe $z = h$ bis zur Ausflusszeit T bei der Höhe $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} &= -\alpha \int_0^T dt \\
 \Rightarrow -2\sqrt{h} &= -\alpha T \\
 \Rightarrow T &= \frac{2}{\alpha} \sqrt{h} \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g} (A_1^2/A_2^2 - 1)}
 \end{aligned}$$

- Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$T = 95.8 \text{ s}$$

- Dieser Wert ist natürlich zu klein, da Reibungsvorgänge und Turbulenzen beim Ausfluss vernachlässigt worden sind.

Lösung von Aufgabe 13



- Aus dem Volumenstrom $\dot{V}_K = 7.2 \text{ l/h}$ des Kraftstoffs ergibt sich seine Geschwindigkeit w_K an der Düse:

$$\dot{V}_K = w_K A$$

$$\Rightarrow w_K = \dot{V}_K / A = 1 \text{ m/s}$$

- Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung für den Kraftstoff erhält man damit den Unterdruck in der Düse

$$p_0 = p_1 + \rho_K g h + \rho_K/2 w_K^2$$

$$\Rightarrow p_0 - p_1 = \rho_K g h + \rho_K/2 w_K^2 = 584.8 \text{ Pa}$$

- Die Bernoulli-Gleichung für die Luft liefert dann die Geschwindigkeit w_L der Luft in der Düse

$$p_0 + \rho_L/2 w_0^2 = p_1 + \rho_L/2 w_L^2$$

- Mit $w_0 \approx 0$ folgt

$$w_L = \sqrt{\frac{2}{\rho_L}(p_0 - p_1)} = 31.22 \text{ m/s}$$

Lösung von Aufgabe 14



- Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$w_1 A_1 = w_2 A_2$$

$$\Rightarrow w_2 = w_1 A_1/A_2 = w_1 d_1^2/d_2^2$$

- Damit erhält man aus der Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \rho/2 w_1^2 = p_2 + \rho/2 w_2^2$$

$$\Rightarrow p_1 - p_2 = \rho/2 (w_2^2 - w_1^2) = \rho/2(d_1^4/d_2^4 - 1) w_1^2$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_2}{d_1^4/d_2^4 - 1}} = 7.856 \text{ m/s}$$

- Der Volumenstrom ist somit

$$\dot{V} = A_1 w_1$$

$$= \frac{\pi}{4} d_1^2 w_1$$

$$= 0.0395 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 39.5 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

Lösung von Aufgabe 15



- Da der Druck gleich bleibt, wird die Arbeit der Pumpe in Hubarbeit und Beschleunigungsarbeit umgewandelt. Aus der Bernoulli-Gleichung wird also

$$\rho w_{t12} = \rho g h + \frac{1}{2} \rho w^2$$

$$\Rightarrow h = (w_{t12} - \frac{1}{2} w^2)/g$$

- Die Leistung ist

$$\begin{aligned} P &= w_{t12} \dot{m} \\ &= w_{t12} \rho A w \\ \Rightarrow w_{t12} &= \frac{P}{\rho A w} \\ &= \frac{4P}{\rho \pi d^2 w} = 103.9 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

- Daher

$$h = 9.32 \text{ m}$$

Lösung von Aufgabe 16



- Mit $Re = w L \rho / \eta = w L / \nu$ ergibt sich jeweils

a. Kapillaren: $Re = 10^{-2}$
Aorta: $Re = 1500$

b. Wasser: $Re = 10^5$
Getriebeöl: $Re = 200$
Luft: $Re = 6.41 \cdot 10^3$

Lösung von Aufgabe 17



- Die Reynoldszahl beim Original beträgt

$$Re_0 = v_0 d_0 / \nu_0 = 2.40 \cdot 10^4$$

- Bei gleicher Reynoldszahl beträgt die Dicke des Modelldrahts daher

$$d_M = Re_0 \nu_M / v_M = 0.08 \text{ m}$$

- Wegen der geometrischen Ähnlichkeit erhält man für die Oberflächenrauheit des Modelldrahts

$$k_M = k_0 d_M/d_0 = 0.16 \text{ mm}$$

Lösung von Aufgabe 18



- Die plötzliche Flugbahnänderung geschieht, wenn der Ball vom überkritischen in den kritischen Bereich kommt, wodurch sich die Widerstandskraft plötzlich erhöht. Dies geschieht bei $Re_{krit} = 3 \cdot 10^5$. Die Geschwindigkeit beträgt dann

$$w = Re_{krit} v_{Luft} / d = 21.4 \text{ m/s} = 77.1 \text{ km/h}$$

Lösung von Aufgabe 19



- Zunächst mittlere Geschwindigkeit aus Volumenstrom:

$$\bar{w} = \dot{V}/(\pi d^2/4) = 1.42 \text{ m/s}$$

- Damit die Reynoldszahl bestimmen

$$\text{Re} = \bar{w} d / \nu = 1775$$

$\text{Re} < 2320$, also laminare Strömung.

- Rohrreibungszahl:

$$\lambda = 64/\text{Re} = 0.036$$

- Daraus den Druckunterschied:

$$\Delta p = \lambda l \bar{w}^2 \rho / (2 d) = 6.54 \text{ bar}$$

Lösung von Aufgabe 20



- Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\bar{w} = \frac{\dot{V}}{\pi d^2/4} = 1.70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Durch Interpolation aus Tafelwerten erhält man die Stoffeigenschaften von Wasser bei 15 °C.

$$\text{Dichte } \rho = 998.9 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{kinematische Viskosität } \nu = 1.16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

- Damit ist die Reynoldszahl

$$\text{Re} = \bar{w} d/\nu = 7.34 \cdot 10^5$$

Die Strömung ist also turbulent.

- Weiter sind

$$k/d = 2 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Re } k/d = 147$$

daher liegt die Strömung im Übergangsbereich.

- Mit dem Startwert 0.040 (oder irgendeinem anderen!) erhält man durch Iteration aus der Colebrook-Formel

$$\lambda = 0.0150$$

- Damit ist der Druckabfall

$$\Delta p_V = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 = 0.86 \text{ bar}$$

Lösung von Aufgabe 21



a. Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeiten und Reynoldszahlen:

Der Druckabfall bestimmt sich aus

$$\Delta p_v = \lambda \cdot l/d \cdot \rho/2 \cdot \bar{w}^2$$

Weiter gilt (vermutlich) die Formel von Blasius

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\bar{w}d/\nu}}$$

Setzt man dies oben ein und löst nach \bar{w} auf, erhält man

$$\bar{w} = \left(\frac{2d\Delta p_v}{0.316\rho l} \sqrt[4]{d/\nu} \right)^{4/7}$$

Dies ergibt auf den beiden Teilstücken

$$\bar{w}_{AB} = 0.969 \text{ m/s}, \bar{w}_{CD} = 0.439 \text{ m/s}$$

Die Reynoldszahlen erhält man nun aus $Re = \bar{w} d / \nu$ zu

$$Re_{AB} = 4.85 \cdot 10^4, Re_{CD} = 2.19 \cdot 10^4$$

Beide Teilströmungen sind also turbulent und liegen im Gültigkeitsbereich der Blasius-Beziehung.

b. Die Volumenströme erhält man direkt aus $\dot{V} = A \bar{w} = \bar{w} \pi d^2/4$:

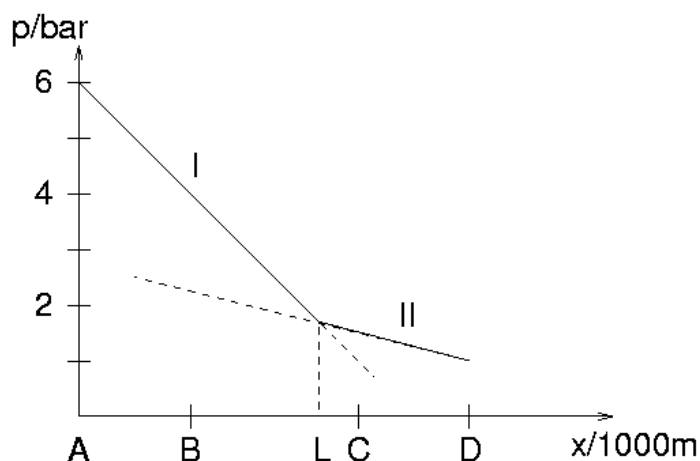
$$\dot{V}_{AB} = 1.90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{V}_{CD} = 0.862 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{Leck} = \dot{V}_{AB} - \dot{V}_{CD} = 1.04 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

c. Ort des Lecks:

Der Druck fällt vor und hinter dem Leck linear ab. Dabei ändert sich die Steigung des Abfalls am Leck:



Der Ort des Lecks ist der Schnittpunkt der beiden Geraden I und II. Mit den Bezeichnungen

$$\hat{p} = p / \text{bar}, \hat{x} = x / \text{km}$$

lauten diese

$$\text{I: } \hat{p} = -2 \hat{x} + 6$$

$$\text{II: } \hat{p} = -0.5 \hat{x} + 2.75$$

Der Schnittpunkt \hat{x}_L ergibt sich durch Gleichsetzen der Geradengleichungen zu

$$\hat{x}_L = 2.1667$$

Das Leck befindet sich also 1167 m hinter Punkt B.